

Н. В. КЛИЕНТОВ

ПОЛУЭМПИРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАСЧЕТА ПЛОСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУИ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ ВДОЛЬ ТВЕРДОЙ СТЕНКИ

Предположим, что плоская турбулентная струя вязкой несжимаемой жидкости вытекает из щелевого источника и распространяется вдоль одной из сторон полубесконечной пластинки. Жидкость струи имеет такую же плотность и вязкость, как жидкость, заполняющая пространство вокруг пластинки. Предположение о том, что струя бьет из щелевого источника, позволяет считать область течения пограничным слоем с нулевым градиентом давления поперек слоя. Поэтому для решения задачи можно воспользоваться уравнениями турбулентного движения жидкости в пограничном слое. Система дифференциальных уравнений, определяющая динамическую задачу, имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Экспериментальные исследования, проведенные рядом авторов, показывают, что при распространении полуограниченных турбулентных струй профиль распределения скоростей является несимметричным и область течения вдоль стенки по форме профилей скорости может быть разделена на внутреннюю и внешнюю области. Во внутренней области струи, имеющей толщину δ_m , равную значению ординаты y точки с максимальной скоростью V_{\max} , форма профилей скорости близка к форме профилей скорости в пограничном слое на пластинке, а во внешней области струи с условной толщиной δ , отсчитываемой от точки с максимальной скоростью, — к фор-

ме профилей скорости свободной плоской струи. Система дифференциальных уравнений (1) будет единой системой как для внутренней, так и для внешней областей течения с граничными условиями вида:

$$\left. \begin{aligned} V_x &= 0, \quad V_y = 0 && \text{при } y = 0; \\ V_x &= V_{\max} && \text{при } y = \delta_m; \\ V_x &= 0; \quad \frac{\partial V_x}{\partial y} = 0 && \text{при } y = \delta_m + \delta \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Известно [1, 2], что для получения решения динамической задачи, отличного от тривиального нулевого решения, должно выполняться условие

$$E = \int_0^{\delta_m} V_x^2 \left(\int_0^y V_x dy \right) dy = \text{const} \quad (3)$$

При распространении турбулентной струи вдоль гладкой стенки различаются три участка: начальный, переходный и основной. Экспериментальные данные [3, 4] показывают, что на начальном участке касательное напряжение трения на стенке определяется формулой

$$\tau_w = 0,0296 \rho V_{\max}^2 \text{Re}_x^{-0,2}, \quad \text{Re}_x = \frac{V_0 x}{\nu} \quad (4)$$

На участке $5 < \frac{x}{a} < 20$ значение τ_w возрастает и может быть найдено по известному закону Блазиуса. При $\frac{x}{a} > 20 \div 30$, т. е. на основном участке, касательное напряжение определяется формулой

$$\tau_w = 0,02825 \rho V_{\max}^2 \text{Re}_{\delta_m}^{-0,25}, \quad \text{Re}_{\delta_m} = \frac{V_{\max} \delta_m}{\nu} \quad (5)$$

Рассмотрим решение динамической задачи для внутренней области на основном участке.

Будем считать, что напряжение трения на стенке определяется формулой (5) и исследуемая полуограниченная турбулентная струя имеет профиль скоростей

$$V_x = V_{\max} \left(\frac{y}{\delta_m} \right)^k, \quad (6)$$

где k — постоянная, во многих случаях равна $1/7$. Подставляя в условие (3), найдем

$$V_{\max} = [(k+1)(3k+2)E]^{1/3} \delta_m^{-2/3} \quad (7)$$

Воспользовавшись уравнением импульсов для определения толщины δ_m внутренней области, получим дифференциальное уравнение вида

$$\delta_m^{1/12} \frac{d\delta_m}{dx} = \frac{0,08475 (2k+1) \nu^{1/4}}{[(k+1)(3k+2)E]^{1/12}} \quad (8)$$

Произведя интегрирование с учетом, что $\delta_m = 0$ при $x=0$, найдем

$$\delta_m = \frac{\sqrt[3]{13} [0,0918 (2k+1) x]^{12/13}}{[(k+1)(3k+2) E]^{1/13}}. \quad (9)$$

Тогда

$$V_{\max} = \frac{[(k+1)(3k+2) E]^{5/13}}{\sqrt[2]{13} [0,0918 (2k+1) x]^{8/13}}; \quad (10)$$

$$\tau_w = \frac{0,02825 \rho [(k+1)(3k+2) E]^{9/13}}{\sqrt[1]{13} [0,0918 (2k+1) x]^{17/13}}. \quad (11)$$

Введем определяемый на основании экспериментальных данных структурный коэффициент

$$\varepsilon = \left(\frac{V_0^3 a^2}{E} \right)^{1/13}, \quad (12)$$

где V_0 — осредненная скорость на срезе сопла; a — высота выходной щели сопла.

Тогда, полагая $\kappa = \frac{1}{7}$, получим:

$$\frac{\delta_m}{a} = 0,129 \varepsilon \operatorname{Re}_a^{-3/13} \left(\frac{x}{a} \right)^{12/13};$$

$$\frac{V_{\max}}{V_0} = 5,612 \varepsilon^{-5} \operatorname{Re}_a^{2/13} \left(\frac{x}{a} \right)^{-8/13}; \quad (14)$$

$$c = 0,0565 \operatorname{Re}_m^{-0,25}, \quad \operatorname{Re}_a = \frac{V_0 a}{\nu}. \quad (15)$$

Экспериментальные данные [4, 5] показывают, что

$$\frac{V_{\max}}{V_0} = 3,45 \left(\frac{x}{a} \right)^{-0,5}. \quad (16)$$

Более точно данным опыта (рис. 1) отвечает зависимость

$$\frac{V_{\max}}{V_0} = 3,45 \left(\frac{x}{a} \right)^{-0,49}. \quad (17)$$

Сравнивая выражения (14) и (16), получим

$$\varepsilon = 1,1026 \operatorname{Re}_a^{2/65} \left(\frac{x}{a} \right)^{-3/130}. \quad (18)$$

Тогда

$$\frac{\delta_m}{a} = 0,142 \operatorname{Re}_a^{-0,2} \left(\frac{x}{a} \right)^{0,9}; \quad (19)$$

$$\tau_w = 0,402 \rho V_0^2 \operatorname{Re}_a^{-0,2} \left(\frac{x}{a} \right)^{-1,1}; \quad (20)$$

$$c_f = 0,0675 \operatorname{Re}_a^{-0,2} \left(\frac{x}{a} \right)^{-0,1}. \quad (21)$$

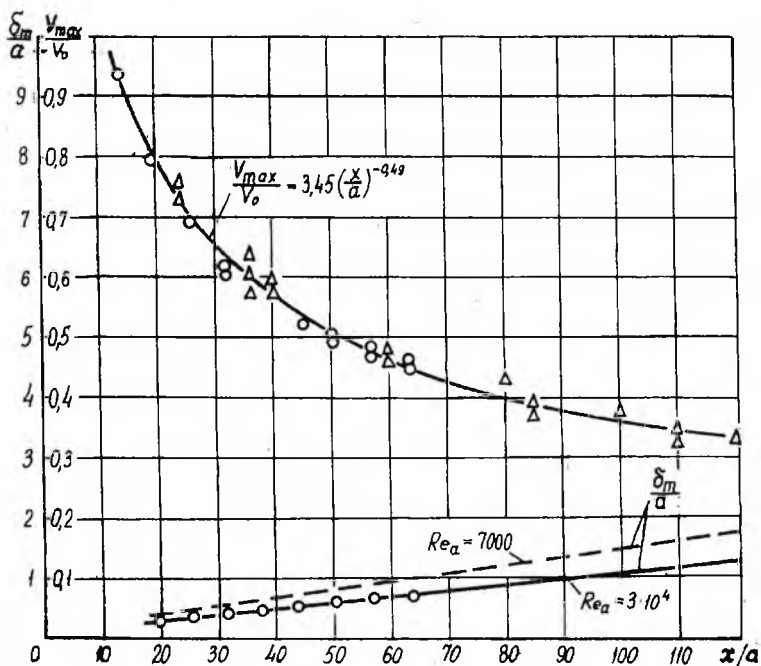


Рис. 1.

Если коэффициент ε определить путем сравнения выражений (14) и (17), то получим:

$$\frac{\delta_m}{a} = 0,142 Re_\alpha^{-0,2} \left(\frac{x}{a}\right)^{0,898}; \quad (22)$$

$$\tau_w = 0,402 \rho V_0^2 Re_\alpha^{-0,2} \left(\frac{x}{a}\right)^{-1,082}; \quad (23)$$

$$c_f = 0,0675 Re_\alpha^{-0,2} \left(\frac{x}{a}\right)^{-0,082}. \quad (24)$$

Значения $\frac{\delta_m}{a}$, τ_w , c_f , найденные по этим формулам, практически будут мало отличаться от результатов расчета по формулам (19), (20), (21).

Для переходного участка, путем аналогичных вычислений найдем:

$$\frac{\delta_m}{a} = 0,1 Re_\alpha^{-0,2} \left(\frac{x}{a}\right)^{0,9}; \quad (25)$$

$$\tau_w = 0,32 \rho V_0^2 Re_\alpha^{-0,2} \left(\frac{x}{a}\right)^{-1,1}; \quad (26)$$

$$c_f = 0,0538 \operatorname{Re}_a^{-0,2} \left(\frac{x}{a} \right)^{-0,1}. \quad (27)$$

Теперь рассмотрим решение динамической задачи для внешней области струи. Профиль скоростей зададим функцией вида

$$V_x = V_{\max} \exp \left[-\beta^2 \left(\frac{y - \delta_m}{\delta} \right)^2 \right], \quad (28)$$

где β — постоянная, определяемая условиями задачи. Например, если потребовать, чтобы [3, 7]

$$V_x = \frac{1}{2} V_{\max} \text{ при } y = \delta_m + \delta,$$

то $\beta = \sqrt{\ln 2}$.

Подстановка выражений (5) и (28) в уравнение импульсов для турбулентного слоя во внешней области струи приводит к уравнению

$$\frac{d}{dx} \left[\left(\frac{V_{\max}}{V_0} \right)^2 \delta \right] = -0,037 \left(\frac{V_{\max}}{V_0} \right)^2 \left(\frac{V_{\max}}{V_0} \cdot \frac{\delta_m}{a} \operatorname{Re}_a \right)^{-0,25}. \quad (29)$$

Воспользовавшись формулами (16) и (19), получим для определения $\frac{\delta}{a}$ линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\delta}{dx} - \frac{\delta}{a} = -0,044 \operatorname{Re}_a^{-0,2} \left(\frac{x}{a} \right)^{-0,1}, \quad (30)$$

общее решение которого имеет вид

$$\frac{\delta}{a} = \frac{x}{a} \left[c + 0,44 \operatorname{Re}_a^{-0,2} \left(\frac{x}{a} \right)^{-0,1} \right]. \quad (31)$$

Определение начальных значений основного участка с развитой турбулентностью связано с известными трудностями, не позволяющими найти точное значение $\frac{x_0}{a}$. Начальные условия для основного участка зададим, исходя из экспериментальных данных (рис. 2). Тогда

$$c = 0,09 - 0,34 \operatorname{Re}_a^{-0,2} \quad (32)$$

и относительная толщина внешней области будет определяться формулой

$$\frac{\delta}{a} = (0,09 - 0,34 \operatorname{Re}_a^{-0,2}) \frac{x}{a} + 0,44 \operatorname{Re}_a^{-0,2} \left(\frac{x}{a} \right)^{0,9} \quad (33)$$

Если воспользоваться формулами (19), (21) и (33), то в зависимости от Re_a относительные толщины внутренней и внешней областей и коэффициент сопротивления на основном участке струи будут определяться формулами, представленными в таблице 1.

Сравнение результатов расчета по этим формулам дает хорошее совпадение с имеющимися экспериментальными данными [4, 5].

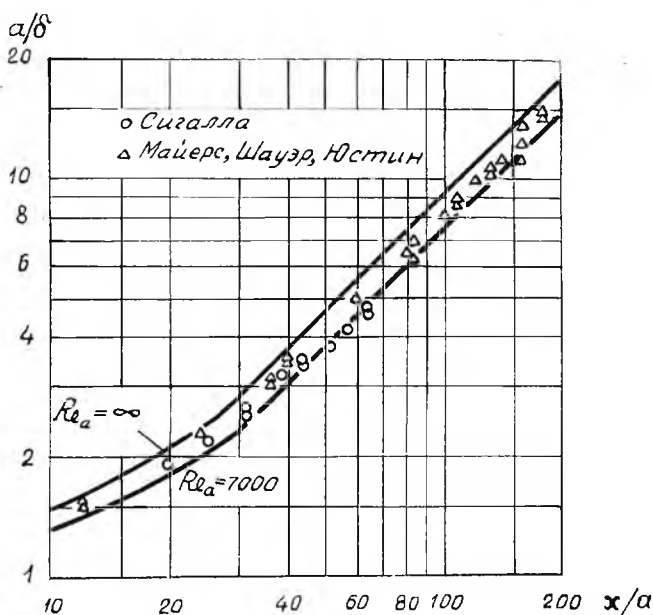


Рис. 2.

На рис. 1 и 2 сплошными и пунктирными линиями изображены результаты расчета. Опытные точки отмечены соответствующими значками.

Таблица 1

Re_a	$\frac{\delta_m}{a}$	$\frac{\delta}{a}$	c_f
7000	$0,024\left(\frac{x}{a}\right)^{0,9}$	$0,03\frac{x}{a} + 3\frac{\delta_m}{a}$	$0,011\left(\frac{x}{a}\right)^{-0,1}$
$3 \cdot 10^4$	$0,018\left(\frac{x}{a}\right)^{0,9}$	$0,047\frac{x}{a} + 3\frac{\delta_m}{a}$	$0,0083\left(\frac{x}{a}\right)^{-0,1}$
$5,3 \cdot 10^4$	$0,016\left(\frac{x}{a}\right)^{0,9}$	$0,052\frac{x}{a} + 3\frac{\delta_m}{a}$	$0,0074\left(\frac{x}{a}\right)^{-0,1}$
∞	0	$0,09\frac{x}{a}$	0

Рассмотрим тепловую задачу.

Непосредственно у стенки, в пределах ламинарного подслоя, турбулентного переноса тепла нет. Температура и скорость по сечению теплового слоя изменяются по линейным законам. Поэтому

тепловой поток, толщина теплового слоя и толщина ламинарного динамического подслоя соответственно будут определяться формулами [8]:

$$q_w = \frac{\lambda T_w}{\delta_T}; \quad (34)$$

$$\delta_T = \text{Pr}^{-\frac{1}{3}} \delta_n; \quad (35)$$

$$\delta_n = \frac{\mu V}{\tau_w} \approx \frac{\mu V_{\max}}{\tau_w}. \quad (36)$$

Воспользовавшись формулами (16) и (20), получим

$$\frac{\delta_T}{a} = 8,582 \text{Pr}^{-\frac{1}{3}} \text{Re}_a^{-0,8} \left(\frac{x}{a}\right)^{0,6}. \quad (37)$$

Тогда

$$\text{Nu} = 0,1165 \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \text{Re}_a^{-0,8} \left(\frac{x}{a}\right)^{0,4} \quad (38)$$

или

$$\text{Nu} = 0,1165 \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \text{Re}_x^{0,8} \left(\frac{x}{a}\right)^{-0,4}. \quad (39)$$

Полагая $\text{Pr} = 0,72$, получим

$$\text{Nu} = 0,1045 \text{Re}_x^{0,8} \left(\frac{x}{a}\right)^{-0,4}. \quad (40)$$

Практически эта формула совпадает с экспериментальной формулой Якоба [6].

Для переходного участка касательное напряжение на стенке определяется формулой (26). В этом случае найдем:

$$\frac{\delta_T}{a} = 10,78 \text{Pr}^{-\frac{1}{3}} \text{Re}_a^{-0,8} \left(\frac{x}{a}\right)^{0,6}; \quad (41)$$

$$\text{Nu} = 0,0927 \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \text{Re}_a^{0,8} \left(\frac{x}{a}\right)^{0,4} \quad (42)$$

или

$$\text{Nu} = 0,0927 \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \text{Re}_x^{0,8} \left(\frac{x}{a}\right)^{-0,4} \quad (43)$$

При $\text{Pr} = 0,72$ получим

$$\text{Nu} = 0,083 \text{Re}_x^{0,8} \left(\frac{x}{a}\right)^{-0,4} \quad (44)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Т. Трофименко. Ученые записки Казахского Госуниверситета, серия математика, механика, вып. 5, 1957.

2. Л. А. Вулис, З. Б. Сакипов, А. Т. Трофименко. Известия Акад. наук СССР, ОТН, механика и машиностроение, № 3, 1962.

3. Sigalla—Aircraft Engineering, v. 36, № 351, 1958,
 4. Sigalla—Journal of the Royal Aeronautical Society, v. 62, № 576, 1958.
 5. Myers, Schauer, Eustis—Transactions of the ASME, v, 85, ser. D, № 1, 1963.
 6. Jakob, Rose, Spielman—Transactions of the ASME, v, 72, № 6, 1950.
 7. Н. И. Акатнов. Известия Академии наук СССР, ОТИ, механика и машиностроение, № 1, 1960.
 8. Н. Я. Фабрикант. Аэродинамика, «Наука», 1964.
-