

В. М. ГОЛОВИН, Ю. Л. ФАИНИЦКИЙ

ПОПЕРЕЧНОЕ ОБТЕКАНИЕ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА, СОВЕРШАЮЩЕГО ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

\bar{x} — продольная координата;

\bar{y} — поперечная координата;

\bar{u}, \bar{v} — соответственно продольная и поперечная составляющие скорости;

\bar{t} — время;

\bar{U} — скорость на границе пограничного слоя;

T — температура жидкости;

ν — кинематический коэффициент жидкости;

σ — число Прандтля;

Re — число Рейнольдса;

Nu_{max} — максимальное значение за период числа Нуссельта;

Nu_{min} — минимальное за период значение числа Нуссельта;

$$Nu_{cp} = \frac{1}{2} (Nu_{max} + Nu_{min});$$

$$\tau_{cp} = \frac{1}{2} (\tau_{max} + \tau_{min});$$

$\bar{\omega}$ — круговая частота;

S — безразмерная частота;

$$F = \frac{2\pi}{S} \text{ — безразмерный период.}$$

И н д е к с ы:

Черта сверху указывает на размерную величину;

∞ — условие в набегающем потоке;

W — условие на поверхности;

$$\overline{Nu} = \frac{1}{2} (Nu_{max} - Nu_{min}) \text{ — амплитуда колебаний числа } Nu;$$

$$\Delta Nu = \frac{1}{F} \int_{t_0}^{t_0+F} Nu(t) dt - Nu_{cp} -$$

добавочная стационарная составляющая безразмерного теплового потока;

$$\Delta \tau = \frac{1}{F} \int_{t_0}^{t_0+F} \tau(t) dt - \tau_{cp} -$$

добавочная стационарная составляющая напряжения трения.

Задача о поперечном обтекании несжимаемой жидкостью цилиндра, совершающего вращательные колебания относительно своей продольной оси (рис. 1), была рассмотрена в работе [1]. При этом делалось предположение о малости возмущений, вносимых колебательным движением в основное течение. Использованный метод разложения по малому параметру позволил произвести расчеты только для случая малых частот. В

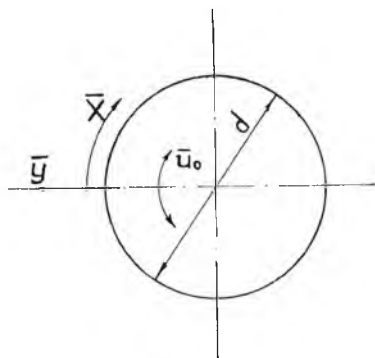


Рис. 1.

настоящей работе рассматриваются колебания цилиндра с произвольной частотой. При этом максимальная скорость поверхности цилиндра считается достаточно малой, так что параметры течения на границе пограничного слоя остаются стационарными.

В безразмерных переменных задача описывается следующей системой уравнения пограничного слоя и крайевых условий:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

$$y = 0: \quad u = u_0 \sin St; \quad v = 0; \quad T = 0.$$

$$y \rightarrow \infty: \quad u \rightarrow U(x); \quad T \rightarrow 1$$

$$u = \frac{\bar{u}}{\bar{U}_\infty}; \quad v = \frac{\bar{v}}{\bar{U}_\infty} \sqrt{Re_\infty}; \quad T = \frac{\bar{T} - \bar{T}_w}{\bar{T}_\infty - \bar{T}_w}. \quad (3)$$

$$x = \frac{\bar{x}}{d}; \quad y = \frac{\bar{y}}{d} \sqrt{Re_\infty}; \quad Re_\infty = \frac{\bar{U}_\infty d}{\nu}.$$

$$t = \bar{t} \frac{\bar{U}_\infty}{d}; \quad S = \frac{\bar{\omega} d}{\bar{U}_\infty}.$$

Используем для расчета предложенную Фарном и Арпачи [2] схему численной реализации полученной системы. Разбивая область изменения функций на конечное число частей, для каждого из узлов, не лежащих на границе области, получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 u_{i,j}^{n+1} &= u_{i,j}^n + \Delta t \left(U_i^n \frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{\Delta x} - u_{i,j}^n \frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta x} - \right. \\
 &\quad \left. - v_{i,j}^n \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right); \\
 T_{i,j}^{n+1} &= T_{i,j}^n + \Delta t \left(\frac{1}{\sigma} \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} - \right. \\
 &\quad \left. - u_{i,j}^n \frac{T_{i,j}^n - T_{i-1,j}^n}{\Delta x} - v_{i,j}^n \frac{T_{i,j+1}^n - T_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right); \\
 v_{i,j}^{n+1} &= v_{i,j-1}^n - \frac{\Delta y}{2\Delta x} (u_{i,j-1}^{n+1} - u_{i-1,j-1}^{n+1} + u_{i,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}).
 \end{aligned}$$

Краевые условия при $y=0$ и $y \rightarrow \infty$ задаются непосредственно в прежнем виде. При этом распределение скорости на границе пограничного слоя принимается согласно экспериментальным данным Хименца [4]

$$U = 3,67x - 2,19x^3 - 1,53x^5. \quad (4)$$

Задача замыкается заданием условий в области критической точки, т. е. при $x=0$. Как показал Глауэрт [3], в этой области при гармоническом законе изменения скорости поверхности по времени температура жидкости и нормальная составляющая ее скорости не зависят от наличия колебаний и сохраняют значения, соответствующие стационарному случаю. Величину продольной скорости можно представить в виде суммы двух функций, одна из которых равна скорости, соответствующей стационарному течению, другая не зависит от продольной координаты. Как известно, [3], стационарная составляющая u_c продольной скорости, нормальная скорость и температура определяются выражениями:

при $u_c|_{y \rightarrow \infty} = cx$

$$u_c = cx f'(\eta); \quad v = -(c\nu)^{1/2} f(\eta); \quad \eta = \left(\frac{c}{\nu}\right)^{1/2} y;$$

$$T = \frac{\int_0^{\eta} e^{-\sigma f^2} d\eta}{\int_0^{\infty} e^{-\sigma f^2} d\eta}; \quad f^0 = \int_0^{\eta} f d\eta,$$

где f — функция Хименца. Необходимые для расчета значения этой функции задавались в виде таблиц.

Нестационарная составляющая u_t продольной скорости в критической точке удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} + u_t \frac{\partial u_c}{\partial x} + v \frac{\partial u_t}{\partial y} = \frac{\partial^2 u_t}{\partial y^2} \quad (5)$$

при краевых условиях

$$u_t|_{y=0} = u_0 \sin St, \quad u_t|_{y \rightarrow \infty} = 0.$$

Переходя к конечно-разностному представлению, получим

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n + \Delta t \left(\frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{ij}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} - u_{ij}^n \left(\frac{\partial u_c}{\partial x} \right)_i - v_j \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right).$$

Для предварительной оценки устойчивости рассматриваемой явной схемы использовались указанные в работе [2] условия:

$$\Delta t \leq \frac{1}{\frac{u_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{2}{\Delta y^2}},$$

$$\Delta y \leq \frac{2}{|v_{i,j}|}.$$

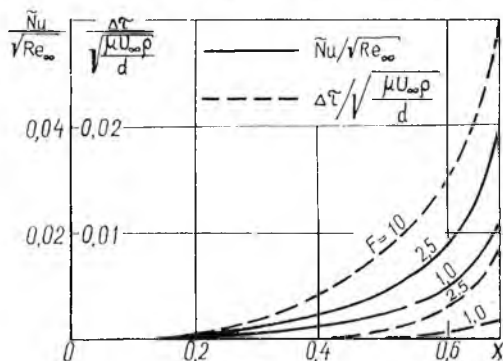


Рис. 2.

Величина шага по времени уточнялась при расчетах. Все расчеты производились при $u_0=0,1$. Результаты представлены на рис. 2—4. При этом введены величины трения на стенке

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$$

и число Нуссельта

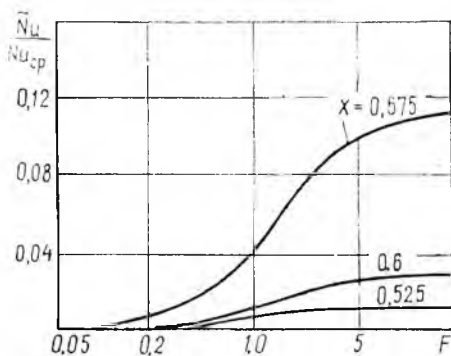


Рис. 3.

$$Nu = \frac{\alpha d}{\lambda},$$

$$\alpha = \frac{q}{T_w - T_\infty}, \quad q = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$$

или

$$\frac{Nu}{\sqrt{Re_\infty}} = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$$

Расчеты показывают, что распределение по поверхности цилиндра средних за период значений напряжения трения и теплового потока в зависимости от частоты колебаний прак-

тически не изменяется и не отличается от стационарного. Амплитуды колебаний теплового потока относительно средних значений приведены на рис. 2 и 3. Они равны нулю вблизи критической точки, в полном согласии с выводом Глауэрта [3] о том, что в области критической точки колебания не влияют на поле температур. Затем по мере удаления от критической точки амплитуда колебаний теплового потока начинает увеличиваться, и особенно резкое увеличение имеет место в области перед точкой отрыва. Интересный характер имеет изменение амплитуды теплового потока в зависимости от величины периода (рис. 3). При малых частотах (т. е. при больших значениях периода колебаний) происходит квазистационарное изменение теплового потока по времени. В этом случае тепловой поток в каждый момент времени можно определить как поток к цилиндру, вращающемуся со скоростью, соответствующей данной мгновенной скорости поверхности. При этом его колебание имеет максимальную амплитуду.

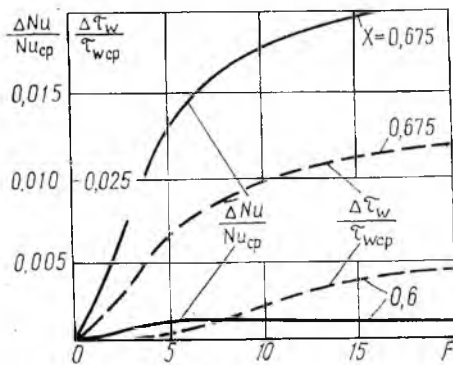


Рис. 4.

При очень больших частотах температурное поле «не успевает» реагировать на изменение поля скоростей, амплитуда колебаний теплового потока приближается к нулю. В окрестности значения безмерной величины периода $F=1$ амплитуда колебаний теплового потока резко изменяется от очень малой величины, соответствующей высоким частотам, до больших, близких максимальным величинам, характерных для малых частот колебаний. Имеют место также

добавочные стационарные составляющие напряжения трения и теплового потока (рис. 4). Их распределение по поверхности и зависимость от частоты аналогичны зависимостям для амплитуды теплового потока, однако по величине они существенно меньше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wen-Jei Yang. Transport phenomena from cylinders in reciprocating harmonic rotation including uniform suction or blowing. Paper ASME, 1965, № WA/HT-6.
2. Farn Charles L. S., Arpaci Vedat S. On the numerical solution of unsteady, laminar boundary layers. AIAA Journal, 1966, 4, № 4.
3. M. B. Glauert. The laminar boundary layer on oscillating plates and cylinders. Journal of fluid mechanics, 1, 1, 1956.
4. W. West. Grenzschichten an zylindrischen Körpern mit nichtstationäre Querbewegung. Z. angew. Math Mech. Bd. 32, № 6, 1952.