КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
им. С. П. КОРОЛЕВА
Аэромеханика и системы управления
Труды, выпуск 35, 1971 г.

Г. В. ФИЛИППОВ, В. Г. ШАХОВ

ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ, ВЫЗЫВАЕМОЕ ВРАЩЕНИЕМ ДВУХ КОАКСИАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРОВ

1. Изучение течений вокруг вращающихся тел тесно связано с вопросами проектирования турбомашин, электрических машин, охлаждения их роторов и т. д.

Наиболее простой задачей в этой области является рассмотрение течения между двумя вращающимися с разной скоростью (и в общем случае в разные стороны) цилиндрами. В литературе известны как теоретические, так и экспериментальные исследования данного вопроса. Для ламинарного течения сжимаемой среды решение получено Л. Г. Степанянцем [1] (см. также [2], где рассмотрены другие случаи ламинарных течений данного типа).

При расчете турбулентного течения необходимо принять какую-либо гипотезу о связи турбулентных напряжений трения с осредненными скоростями течения. Обычно считают, что составляющие тензора турбулентных напряжений пропорциональны соответствующим составляющим тензора осредненных скоростей деформации [2]. Это предположение эквивалентно гипотезе (условимся называть ее «первой») о сохранении количества движения, выдвинутой Л. Прандтлем.

Однако при вращательном движении жидкости может быть принята и гипотеза о сохранении момента количества движения («вторая») [3].

Использование «первой» гипотезы при изучении этого типа течений можно найти в [2]. Но в работах [4] и [5] находит косвенное, а в [3] — непосредственное подтверждение «вторая» гипотеза.

В предлагаемой статье проведено сопоставление расчетов характеристик течения по «первой» и «второй» гипотезам.

2. Так как результаты, вытекающие из использования «первой» гипотезы, можно найти в [2], то в данном разделе рассмотрим применение «второй» гипотезы.

Аналитически «вторая» гипотеза может быть представлена в виде [3]

$$\frac{|\tau|}{\rho} = -\frac{\varepsilon}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r}, \tag{2.1}$$

где τ — напряжение трения;

v — осредненная окружная скорость;

r — расстояние от оси цилиндров;

ρ — плотность жидкости;

ε — кинематический (турбулентный) коэффициент вязкости;

Как и в [2], будем считать, что турбулентная вязкость изменяется с расстоянием от стенок цилиндра следующим образом:

$$\frac{\varepsilon}{v_*} = \varkappa\frac{(r_2-r)(r-r_1)}{r_2-r_1}, \quad \left(v_* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}\right), \tag{2.2}$$

где $\varkappa$ — постоянная турбулентности;

r_1 — радиус внутреннего цилиндра;

r_2 — радиус внешнего цилиндра.

Для простоты далее рассмотрим случай, когда внутренний цилиндр вращается, а внешний неподвижен. В этом случае с учетом уравнения сохранения момента сил трения имеем:

$$v_* r = v_{*1} r_1, \; v_{*1} = \sqrt{\frac{\tau_1}{\rho}}, \tag{2.3}$$

где τ_1 — напряжение трения на поверхности внутреннего цилиндра.

Подставляя (2.2) — (2.3) в (2.1), получим

$$\varkappa\frac{\partial (rv)}{\partial r} = -\frac{v_{*1} r_1 (r_2-r_1)}{(r_2-r)(r-r_1)} \tag{2.4}$$

Интегрирование (2.4) дает профиль скорости

$$\varkappa\frac{rv}{r_1 v_{*1}} = \ln\frac{r_2-r}{r-r_1} + C, \tag{2.5}$$

где C — постоянная интегрирования.

Рассматривая ламинарные подслои около поверхностей цилиндров и считая их малыми, можно предположить, что распределение скоростей в них имеет линейный характер. Поэтому на границах ламинарных подслоев скорости определяются:

$$\left.\begin{aligned} v_{1л} &= v_1 - \alpha v_{*1}, \\ v_{2л} &= \alpha v_{*2} = \alpha\frac{v_{*1} r_1}{r_2} \end{aligned}\right\}, \tag{2.6}$$

а соответствующие толщины этих подслоев будут равны:

$$\left.\begin{aligned} \delta_{1_л} &= \frac{\alpha\nu}{v_{*1}}, \\ \delta_{2_л} &= \frac{\alpha\nu}{v_{*2}} = \frac{\alpha\nu r_2}{v_{*1} r_1} = \delta_{1_л}\frac{r_2}{r_1} \end{aligned}\right\}, \tag{2.7}$$

где α — некоторая постоянная. Постоянную α обычно полагают одинаковой для обоих цилиндров.

Подставив значения скорости (2. 6) и толщин ламинарных подслоев (2.7) в (2.5), получим, после исключения постоянной C, уравнения, определяющие распределение скоростей и закон сопротивления:

$$\frac{r}{r_1}\varkappa\frac{v}{v_{*1}} = \varkappa\left(\frac{v_1}{v_{*1}} - \alpha\right) + \ln\left(\frac{r_2 - r}{r - r_1}\cdot\frac{r_1}{r_2 - r_1}\right) - \ln\frac{v_{*1} r_1}{\alpha\nu}, \tag{2.8}$$

$$\varkappa\frac{v_1}{v_{*1}} = 2\varkappa\alpha + 2\ln\frac{v_{*1} r_1}{\alpha\nu} + \ln\left[\frac{(r_2 - r_1)^2}{r_1 r_2}\right]. \tag{2.9}$$

Для сравнения приведем здесь результаты расчета по «первой» гипотезе [2]:

$$\frac{r_1}{r}\varkappa\frac{v}{v_{*1}} = \varkappa\left(\frac{v_1}{v_{*1}} - \alpha\right) + \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) - \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)\frac{r_1}{r} -$$

$$- \ln\left(\frac{r - r_1}{r}\right) - \ln\left(1 + \frac{v_{*1} r_1}{\alpha\nu}\right) - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\ln\left(\frac{r}{r_2 - r}\cdot\frac{r_2 - r_1}{r_1}\right), \tag{2.10}$$

$$\varkappa\frac{v_1}{v_{*1}} = \varkappa\alpha\left[1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right] - \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)^2 + \ln\left(1 + \frac{v_{*1} r_1}{\alpha\nu}\right)\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) +$$

$$+ \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\ln\left(\frac{r_2}{r_1} - 1\right)\left(\frac{v_{*1} r_1}{\alpha\nu} - 1\right). \tag{2.11}$$

3. Одним из предельных случаев (при r_1, $r_2 \to \infty$) является течение Куэтта — течение между двумя параллельными стенками, из которых одна неподвижна, а другая движется в своей плоскости с постоянной скоростью v_1. Для него, как из (2.8) и (2.9), так и из (2.10) и (2.11), следует одинаковый результат:

$$\varkappa\frac{v}{v_{*1}} = \varkappa\frac{v_1}{v_{*1}} - \varkappa\alpha - \ln\left(\frac{s v_{*1}}{\alpha\nu}\cdot\frac{r - r_1}{r_2 - r}\right), \tag{3.1}$$

$$\varkappa\frac{v_1}{v_{*1}} = 2\varkappa\alpha + 2\ln\frac{v_{*1} s}{\alpha\nu}, \tag{3.2}$$

где $s = r_2 - r_1$ — расстояние между стенками цилиндров.

Следовательно, можно полагать [2]: $\alpha = 7{,}5$; $\varkappa = 0{,}4$.

4. Для случая $\frac{s}{r_2} \ll 1$ закон сопротивления (2.9) можно представить в виде

$$\varkappa\frac{v_1}{v_{*1}} = 2\varkappa\alpha + 2\ln\left(\frac{v_{*1}}{\alpha v_1}R_s\right), \quad R_s = \frac{v_1 s}{\nu}. \tag{4.1}$$

Закон сопротивления (4.1) в точности соответствует закону сопротивления в течении Куэтта (3.2). Отсюда следует, что параметр $\frac{s}{r_2} < 1$ слабо влияет на сопротивление вращению, что подтверждается экспериментами Куэтта и Тейлора [2].

Произведенные расчеты показали, что формулы (2.9), (2.11) и (4.1) дают результаты, расходящиеся с экспериментальными данными Куэтта и Тейлора менее, чем на 5%.

5. Другим предельным случаем является вращение цилиндра в неограниченном пространстве, т. е. $r_2 \to \infty$. Из (2.9) видно, что последний член в правой части, который только и содержит r_2, стремится к бесконечности при $r_2 \to \infty$. Это является недостатком данного подхода.

Принимая во внимание простоту формул (2.8) и (2.9) по сравнению с (2.10) и (2.11), необходимо отдельно выяснить причину неприменимости «второй» гипотезы для этого типа течения.

6. На основании изложенного можно заключить:

а) в случае течения Куэтта расчетные формулы, полученные на основании «первой» и «второй» гипотезы, полностью совпадают;

б) если радиус внешнего цилиндра ограничен, то «вторая» гипотеза приводит к более простым расчетным соотношениям для закона сопротивления и профиля скорости (сравни (2.8) и (2.9) с (2.10) и (2.11), расхождение расчетов коэффициента сопротивления по обеим гипотезам с экспериментальными данными Тейлора и Куэтта не превышает 5%;

в) профиль скорости и закон сопротивления, полученные при помощи «второй» гипотезы, неприемлемы для расчета течения, вызываемого вращением цилиндра в неограниченном пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Г. Степанянц. Некоторые случаи движения сжимаемого вязкого газа. Труды ЛПИ им. М. И. Калинина, № 5, стр. 111—128, 1953.

2. Л. А. Дорфман. Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел, Физматгиз, 1960.

3. E. R. Hoffman, P. N. Joubert, Turbulent line vortices, J. Fluid Mechanics, 16, № 3, 395—411, 1963; русский перевод: Е. П. Хоффман, П. Н. Жубер. Турбулентные линейные вихри. Механика, сб. переводов, № 3, 83—99, 1964.

4. Y. Hsuan, Boundary layer along annular walls in a swirling flow, Traus. ASME, 80, № 4, 767—774, 1958.

5. F. L. Wattendorf, A study of the effect of curvature on fully developed turbulent flow, Proc, Royal Soc. London, 148, 565—598, 1935.