А. Д. Бойков, А. Н. Дмитриев, Н. Д. Егупов

МЕТОД РАСЧЕТА ВЫХОДНЫХ РЕАКЦИЙ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ В ОДНОМ ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ

Пусть нестационарная система автоматического управления описывается дифференциальным уравнением вида:

$$a_n(t)\frac{d^n x_{\text{вых}}}{dt^n}+a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x_{\text{вых}}}{dt^{n-1}}+\ldots+a_0(t)x_{\text{вых}}(t)=b_m(t)\frac{d^m x_{\text{вх}}}{dt^m}+$$

$$+b_{m-1}(t)\frac{d^{m-1}x_{\text{вх}}}{dt^{m-1}}+\ldots+b_0(t)x_{\text{вх}}(t), \qquad (1)$$

$$0\leqslant t\leqslant\infty.$$

Предположим, что для аппроксимации процесса измерения коэффициентов $a_i^*(t)\in L_2$ и $b_i^*(t)\in L_2$

$$[a_i=A_{i0}+a^*i(t) \quad \text{и} \quad b_i(t)=B_{i0}+b_i^*(t)]$$

на отрезке $(0, \infty)$ используется полная относительно L_2 система ортогональных функций, составленная из конечной линейной комбинации экспонент. Такая система может быть получена путем ортогонализации системы линейно-независимых функций $\{e^{-kt}\}$. Так как функции, изображающие процесс изменения коэффициентов $a_i^*(t)$ и $b_i^*(t)$, принадлежат пространству L_2, а выбранная система ортогональных функций замкнута относительно L_2, то приближение можно осуществить с любой степенью точности. Эксперименты доказывают справедливость указанного здесь утверждения относительно точности аппроксимации и показывают, что использование ортогональной системы дает возможность получить не только минимальную среднеквадратическую ошибку, но и достаточно небольшие локальные погрешности, что особенно важно для решения указанной выше задачи.

Итак, пусть

$$a_k(t) = A_0^k + A_1^k e^{-t} + A_2^k e^{-2t} + \dots + A_q^k e^{-qt}, \qquad (2)$$

$$b_l(t) = B_0^{l*} + B_1^{l*} e^{-t} + B_2^l e^{-2t} + \dots + B_{q_1}^{l*} e^{-q_1 t}, \qquad (3)$$

$$k = 1, 2, \dots, n,$$

$$l^* = 1, 2, \dots, m.$$

Для упрощения выкладок принимаем, что процесс изменения всех коэффициентов аппроксимируется одним и тем же числом экспонент и рассматриваемая система имеет нулевые начальные условия.

Если обозначить

$$X_{\text{вых}}(s) = \int_0^\infty x_{\text{вых}}(t)\, e^{-st}\, dt = L\,[x_{\text{вых}}(t)],$$

$$X_{\text{вх}}(s) = \int_0^\infty x_{\text{вх}}(t)\, e^{-st}\, dt = L\,[x_{\text{вх}}(t)],$$

то, применяя преобразование Лапласа с учетом равенства

$$L\left[A_i^k e^{-it} \frac{d^n x}{dt^n} \right] = A_i^k (s+i)^n X(s+i)$$

к уравнению

$$\frac{d^n x_{\text{вых}}(t)}{dt^n} \sum_{i=0}^{q} A_i^n e^{-it} + \frac{d^{n-1} x_{\text{вых}}(t)}{dt^{n-1}} \sum_{i=0}^{q} A_i^{n-1} e^{-it} + \dots + x_{\text{вых}}(t)$$

$$\sum_{i=0}^{q} A_i^0 e^{-it} = \frac{d^m x_{\text{вх}}(t)}{dt^m} \sum_{i=0}^{q_1} B_i^m e^{-it} + \frac{d^{m-1} x_{\text{вх}}(t)}{dt^{m-1}} \sum_{i=0}^{q_1} B_i^{m-1} e^{-it} + \dots$$

$$\dots + x_{\text{вх}}(t) \sum_{i=0}^{q_1} B_i^0 e^{-it}, \qquad (4)$$

получим:

$$\sum_{i=0}^{q} A_i^n (s+i)^n X_{\text{вых}}(s+i) + \sum_{i=0}^{q} A_i^{n-1} (s+i)^{n-1} X_{\text{вых}}(s+i) + \dots$$

$$\dots + \sum_{x=0}^{q} A_i^1 (s+i) X_{\text{вых}}(s+i) + \sum_{i=0}^{q} A_i^0 X_{\text{вых}}(s+i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{q_1} B_i^m (s+i)^m X_{\text{вх}}(s+i) + \sum_{i=0}^{q_1} B_i^{m-1} (s+i)^{m-1} X_{\text{вх}}(s+i) + \dots$$

$$+ \dots \sum_{i=0}^{q_1} B_i^1 (s+i) X_{\text{вх}}(s+i) + \sum_{i=0}^{q_1} B_i^0 X_{\text{вх}}(s+i). \qquad (5)$$

Перепишем это уравнение в другом виде:

$$a_0(s)X_{\text{вых}}(s)+a_1(s)X_{\text{вых}}(s+1)+a_2X_{\text{вых}}(s+2)+\ldots$$
$$\ldots+a_q(s)X_{\text{вых}}(s+q)=b_0(s)X_{\text{вх}}(s)+b_1(s)X_{\text{вх}}(s+1)+$$
$$+b_2(s)X_{\text{вх}}(s+2)+\ldots+b_{q_1}(s)X_{\text{вх}}(s+q_1), \tag{6}$$

где

$$a_0(s)=A^n s^n+A_0^{n-1}s^{n-1}+A_0^{n-2}s^{n-2}+\ldots+A_0^0,$$
$$a_1(s)=A_1^n(s+1)^n+A_1^{n-1}(s+1)^{n-1}+A_1^{n-2}(s+1)^{n-2}+\ldots+A_1^1(s+1)+A_1^0,$$
$$a_2(s)=A_2^n(s+2)^n+A_2(s+2)^{n-1}+A_2^{n-2}(s+2)^{n-2}+\ldots+A_2^1(s+2)+A_2^0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{7}$$
$$a_k(s)=A_k^n(s+k)^n+A_k^{n-1}(s+k)^{n-1}+\ldots+A_k^1(s+k)+A_k^0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_q(s)=A_q^n(s+q)^n+A_q^{n-1}(s+q)^{n-1}+\ldots+A_q^1(s+q)+A_q^0.$$

Аналогичные равенства запишутся для полиномов $b_i(s)$ $(i=0,1,2\ldots\ q_1)$.

Выходную реакцию нестационарной системы будем искать в виде ряда, составленного из некоторой системы ортогональных функций.

Ортогональным базисом можно выбрать систему ортогональных функций Лягерра, как очень хорошо зарекомендовавшую себя со всех точек зрения при исследовании стационарных динамических систем, включая системы с распределенными параметрами и системы с запаздыванием. Кроме этой системы с большим успехом можно использовать ортогонализированные экспоненциальные функции, полиномы Чебышева, Лежандра, Якоби.

Пусть

$$x_{\text{вых}}(t)=\sum_{i=0}^{n}q_i L_i(t), \tag{8}$$

$$x_{\text{вых}}(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i(t), \tag{9}$$

где $L_i(t)$ — ортогональная функция Лягерра;

$\varphi_i(t)$ — ортогонализированные экспоненциальные функции.

Легко видеть справедливость равенств:

$$X_{\text{вых}}(s)=\sum_{i=0}^{n}q_i L_i(s)=\sum_{i=0}^{n}q_i\frac{k}{s+\frac{k}{2}}\left(\frac{s-\frac{k}{2}}{s+\frac{k}{2}}\right)^n \tag{10}$$

или

$$X_{\text{вых}}(s)=\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i(s)=c_1\sqrt{2(a+\bar{\alpha}_1)}\frac{1}{s+\bar{\alpha}_1}+$$

$$+ c_2 \sqrt{2(a+\bar{\alpha}_2)} \frac{s-2a-\bar{\alpha}_1}{(s+\bar{\alpha}_1)(s+\bar{\alpha}_2)} + \ldots + c_n \sqrt{2(a+\bar{\alpha}_n)} \times$$

$$\times \frac{(s-2a-\bar{\alpha}_1)(s-2a-\bar{\alpha}_2)\ldots(s-2a-\bar{\alpha}_{n-1})}{(s+\bar{\alpha}_1)(s+\bar{\alpha}_2)(s+\bar{\alpha}_3)\ldots(s+\bar{\alpha}_n)}. \qquad (11)$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} X_{\text{вых}}(s) &= \sum_{i=0}^{n} q_i L_i(s), \\ X_{\text{вых}}(s+1) &= \sum_{i=0}^{n} q_i L_i(s+1), \\ X_{\text{вых}}(s+2) &= \sum_{i=0}^{n} q_i L_i(s+2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{\text{вых}}(s+q) &= \sum_{i=0}^{n} q_i L_i(s+q). \end{aligned} \qquad (12)$$

Аналогичные равенства можно записать и для ортогонализированных экспоненциальных функций.

Подставляя (12) в (6), будем иметь:

$$a_0(s) \sum_{i=0}^{n} q_i L_i(s) + a_1(s) \sum_{i=0}^{n} q_i L_i(s+1) + a_2(s) \sum_{i=0}^{n} q_i L_i(s+2) + \ldots$$

$$\ldots + a_q(s) \sum_{i=0}^{n} q_i L_i(s+q) = b_0(s) X_{\text{вх}}(s) + b_1(s) X_{\text{вх}}(s+1) +$$

$$+ b_2(s) X_{\text{вх}}(s+2) + \ldots + b_{q_1}(s) X_{\text{вх}}(s+q_1).$$

Из (13) легко получить следующее основное уравнение:

$$\begin{aligned} &q_0 [a_0(s) L_0(s) + a_1(s) L_0(s+1) + a_2(s) L_0(s+2) + \ldots + a_q(s) L_0(s+q)] + \\ &+ q_1 [a_0(s) L_1(s) + a_1(s) L_1(s+1) + a_2(s) L_1(s+2) + \ldots + a_q(s) L_1(s+q)] + \\ &+ q_2 [a_0(s) L_2(s) + a_1(s) L_2(s+1) + a_2(s) L_2(s+2) + \ldots + a_q(s) L_2(s+q)] + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ q_n [a_0(s) L_n(s) + a_1(s) L_n(s+1) + a_2(s) L_n(s+2) + \ldots + a_q(s) L_n(s+q)] = \\ &= b_0(s) X_{\text{вх}}(s) + b_1(s) X_{\text{вх}}(s+1) + b_2(s) X_{\text{вх}}(s+2) + \ldots \\ &\ldots + b_{q_1}(s) X_{\text{вх}}(s+q_1). \end{aligned} \qquad (14)$$

Так как в уравнение (14) кроме неизвестных $q_0, q_1, \ldots, q_n$ входят явные функции (полиномы по s) то, придавая комплексному аргументу s действительные значения $s = 1, 2, 3 \ldots$ (если $Res > 0$), получим следующую систему неоднородных линейных алгебраических уравнений:

$$
\begin{aligned}
a_{10} q_0 + a_{11} q_1 + a_{12} q_2 + \ldots + a_{1n} q_n &= b_1, \\
a_{20} q_0 + a_{21} q_1 + a_{22} q_2 + \ldots + a_{2n} q_n &= b_2, \\
a_{30} q_0 + a_{31} q_1 + a_{32} q_2 + \ldots + a_{3n} q_n &= b_3, \qquad (15) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n+1,0} q_0 + a_{n+1,1} q_1 + a_{n+1,2} q_2 + \ldots + a_{n+1,n} q_n &+ b_n.
\end{aligned}
$$

В формулах (15) коэффициенты a_{lk} и b_l определяются по формулам

$$
\begin{aligned}
a_{lk} = a_0(s) L_k(s) + a_1(s) L_k(s+1) + a_2(s) L_k(s+2) + \ldots \\
\ldots + a_q(s) L_k(s+q) \mid , \quad \text{при } s = l \qquad (16)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_l = b_0(s) X_{\text{вх}}(s) + b_1(s) X_{\text{вх}}(s+1) + b_2(s) X_{\text{вх}}(s+2) + \ldots \\
\ldots + b_{q_1} X_{\text{вх}}(s+q_1) \mid , \quad \text{при } s = l \qquad (17)
\end{aligned}
$$

$$k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, n,$$

$$l = 1,\ 2, \ldots, n+1.$$

Решая систему (16), можно получить решение линейного дифференциального уравнения с переменными параметрами в виде обобщенного ряда Фурье, составленного из ортогональных функций (функций Лягерра, полиномов Лягерра, ортогонализированных экспоненциальных функций, полиномов Чебышева, Лежандра, Якоби). Кратко запишем перечень операций, которые необходимо выполнить, чтобы получить решение дифференциального уравнения с переменными коэффициентами в виде

$$x_{\text{вых}}(t) = \sum_{i=0}^{n} q_i L_i(t). \qquad (18)$$

1. Вычисление моментов входного сигнала $x_{\text{вх}}(t)$ (независимо от того, каким образом он задан — аналитически или графически) по формулам:

$$X_{\text{вх}}(k+l) = \int_0^\infty x_{\text{вх}}(t) e^{-(k+l)t} dt. \qquad (19)$$

2. Вычисление коэффициентов a_{lk}^* и b_l^* по формулам (16) и (17)
3. Решение системы алгебраических уравнений (15).
4. Построение выходной реакции $x_{\text{вых}}(t)$ по формуле (18).

ВЫВОДЫ

В работе разработан метод расчета переходных процессов нестационарных систем автоматического управления. Предложенный алгоритм хорошо приспособлен для реализации на цифровых вычислительных машинах.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Солодовников, А. Н. Дмитриев, Н. Д. Егупов. Ортогональный метод анализа и синтеза линейных систем автоматического управления на основе понятия моментов, Сб. «Автоматическое управление и вычислительная техника», вып. 8. «Машиностроение», 1968.

2. А. В. Солодов. Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами. Физматгиз, 1962.

3. С. Качманс, Г. Штейнгауз. Теория ортогональных рядов. Физматгиз. 1958.