В. А. БОЧКАРЕВ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОПТИМАЛЬНОГО ПРИЕМА СИГНАЛОВ С УЧЕТОМ ДИСПЕРСИОННЫХ СВОЙСТВ КАНАЛА

В последнее время на практике находят все большее применение системы, использующие сложные широкополосные сигналы. Между тем, наличие дисперсии в канале (зависимости фазовой скорости электромагнитной волны от частоты) вызывает искажение сигнала, прошедшего некоторый путь в канале. Причем искажения тем больше, чем шире полоса частот сигнала.

В предлагаемой работе делается попытка отыскания алгоритмов построения оптимальных байесовых приемников бинарных сигналов при различных условиях распространения радиоволн на фоне нормального белого шума. В работе также производится оценка помехоустойчивости обычного корреляционного приемника при поступлении на его вход сигнала, прошедшего некоторое расстояние в канале (ионосфере).

§ 1. Математическая модель канала с дисперсией и аппарат исследования

Передаточная функция канала:

$$\mu(\omega) = |\mu(\omega)|\, e^{i\varphi(\omega)}. \tag{1}$$

Предположим, что $|\mu(\omega)| = \text{const}$ в полосе частот, занимаемой сигналом.

Используя известные выражения из [1, 2], аппроксимируя зависимость электронной концентрации от высоты параболой [3], получим фазочастотную характеристику ионосферного канала для случая $f \gg f_{кр}$ в следующем виде:

$$\varphi(z, f) = \gamma(z) f + \frac{\nu(z)}{f}, \tag{2}$$

$$\begin{cases} \gamma(z) = \dfrac{2\pi(z + z_0)}{c} \\ \nu(z) = \dfrac{80{,}8\pi N_m}{3cz_m^2}(z^3 - 3z_m z^2). \end{cases} \tag{3}$$

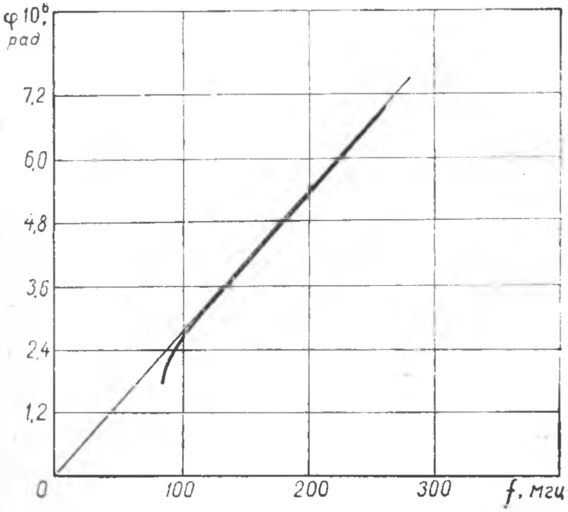

Рис. 1

Очевидно, что функция $\nu(z)$ в пределах ионосферного параболического слоя везде отрицательна.

На рис. 1 представлена фазочастотная характеристика при следующих исходных данных [4].

$$z_0 = 150 \ км$$
$$z = 2z_m = 500 \ км;$$
$$z_m = 250 \ км;$$
$$N_m = 1{,}8 \cdot 10^6 \ см^{-3}.$$

Выясним теперь вопрос о распределении вероятностей флуктуирующих величин.

Пусть передатчик излучает радиосигнал $S(t)$. На выходе приемника сигнал в сумме с помехой (нормальный белый шум) будет иметь вид:

$$\xi(t) = S'(t) + n(t), \tag{4}$$

где $S'(t)$ — сигнал на входе приемника;

$n(t)$ — аддитивная флуктуационная помеха.

Представим (4) в виде ряда Фурье [5] на интервале анализа T.

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{h} (A_k \cos k\Omega t + B_k \sin k\Omega t), \tag{5}$$

где

$$\begin{cases} A_k = \alpha_k + \mu_k(a_k \cos\varphi_k + b_k \sin\varphi_k), \\ B_k = \beta_k + \mu_k(b_k \cos\varphi_k - a_k \sin\varphi_k). \end{cases} \tag{6}$$

При анализе случайных величин $\mu_k \cos\varphi_k = u_k$ и $\mu_k \sin\varphi_k = v_k$ рассмотрим два случая:

1. $\mu_k = \mu = \text{const}$ и случайной величиной является φ_k, флуктуации которой вызваны изменениями электронной плотности во времени. Этот случай соответствует относительно медленным колебаниям электронной концентрации (часовым, суточным и т. п.).

2. Быстрые флуктуации электронной концентрации, обусловленные тонкой структурой ионосферы (образованием и исчезновени-

ем мелкомасштабных неоднородностей, перемещениями этих неоднородностей в пространстве и т. д.). Имеет смысл предположить в этом случае распределение вероятности величин u_k и v_k нормальными, считая, что число причин, вызывающих флуктуации параметров u_k и v_k, достаточно велико.

Рассмотрим эти случаи более подробно.

Предположим, что $\mu_k = \mu = \text{const}$ во всей полосе частот сигнала. Найдем распределение вероятностей для φ_k, предполагая распределение вероятностей для случайной величины $N(z)$ нормальным с математическим ожиданием m_N и дисперсией G_N^2.

Выражая из (2) и (3) $\varphi(z, f)$ через N_m

$$\varphi(z, f) = a(z_1 f) N_m + b(z_1 f), \tag{7}$$

где

$$\begin{cases} a(z, f) = \dfrac{80{,}8\pi\,(z^3 - 3zmz^2)}{3cz_m^2 f} \\ b(z, f) = \gamma(z) f. \end{cases} \tag{8}$$

и предполагая, что при флуктуациях $N(z)$ величины z_o и z_m остаются постоянными (по экспериментальным данным [4], получим выражение для распределения вероятностей фаз к-той частотной компоненты спектра сигнала

$$W(\varphi_k) = \frac{1}{G_k\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\varphi_k - m_k)^2}{2G_n^2}\right], \tag{9}$$

где

$$\begin{cases} G_k^2 = |a(z, f)|^2 G_N^2, \\ m_k = a(z, f) m_n + b(z_1 f). \end{cases} \tag{10}$$

Таким образом, случайная величина φ_k распределена также по нормальному закону с математическим ожиданием и дисперсией, зависящими от частоты и от высоты z, причем с увеличением частоты дисперсия уменьшается.

Так как флуктуации фазы любой компоненты спектра сигнала вызываются одной и той же причиной, а именно флуктуациями электронной концентрации N_m, а между всеми фазами спектра существует аналитическая связь (2), то, согласно [7]. K-мерная плотность вероятности запишется в следующем виде:

$$W_k(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) = \frac{\exp\left[-\dfrac{(\varphi_1 - m_1)^2}{2G_1{}^2}\right]}{G_1 \ldots G_k\sqrt{2\pi}} \prod_{k=2}^{K} \delta\left(\frac{\varphi_k - m_k}{G_k} - \frac{\varphi_1 - m_1}{G_1}\right), \tag{11}$$

где $\delta(x - x_o)$ — функция Дирака.

Перейдем к рассмотрению второго случая.

Как уже полагалось выше, распределения вероятностей случайных величин $u_k = \mu_k \cos\varphi_k$ и $v_k = \mu_k \sin\varphi_k$ считаем нормальными с параметрами m_{1k}, $G^2{}_{1k}$ и m_{2k}, $G^2{}_{2k}$ соответственно.

Предположим, что между всеми $\mu_k (k=1, 2, ...,)$ в полосе частот сигнала существует аналитическая связь (плоскочастотный фединг). Для упрощения примем $\mu_k=\mu=\text{const}$ во всей полосе частот сигнала.

В этом случае коэффициент корреляции между u_k, u_{k+e} (v_k, v_{k+e}) равен 1. Тогда K-мерные плотности вероятностей запишутся следующим образом:

$$\left\{\begin{aligned} W_k(u_1, ..., u_k) &= \frac{\exp\left[-\dfrac{(u_1-m_{11})^2}{2G_{11}^2}\right]}{G_{11} \ldots G_{1k}\sqrt{2\pi}} \prod_{k=2}^{K} \delta\left(\frac{u_k-m_{1k}}{G_{1k}} - \frac{u_1-m_{11}}{G_{11}}\right), \\ W_k(U_1, ..., U_k) &= \frac{\exp\left[-\dfrac{(v_1-m_{21})^2}{2G_{21}^2}\right]}{G_{21} \ldots G_{2k}\sqrt{2\pi}} \prod_{k=2}^{K} \delta\left(\frac{v_k-m_{2k}}{G_{2k}} - \frac{v_1-m_{21}}{G_{21}}\right). \end{aligned}\right. \quad (12)$$

2. Пусть $\mu=\mu(\omega)$, причем корреляция между μ_k и μ_{k+e} равна 0, т. е любая пара значений μ_k и μ_{k+e} будет флуктуировать независимо друг от друга (селективный фединг). Тогда случайные величины u_k и u_{k+e} (v_k и v_{k+e}) будут некоррелированы. При этом K-мерные плотности вероятностей соответственно для случайных величин u_k и v_k примут вид [7]

$$\left\{\begin{aligned} W_K(u_1, \ldots, u_k) &= \prod_{k=1}^{K} \frac{1}{G_{1k}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(u_k-m_{1k})^2}{2G_{1k}^2}\right], \\ W_K(v_1, \ldots, v_k) &= \prod_{k=1}^{K} \frac{1}{G_{2k}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(v_k-m_{2k})^2}{2G_{2k}^2}\right]. \end{aligned}\right. \quad (13)$$

§ 2. Пути построения оптимальных бинарных байесовых приемников радиосигналов с учетом дисперсионных свойств ионосферы

Для случая приема бинарных детерминированных сигналов отношение правдоподобия можно записать в виде [5. 6]

$$\lambda = \frac{\exp\left\{-\dfrac{1}{N_0}\int\limits_0^T [\xi(t) - S_r(t)]^2\,dt\right\}}{\exp\left\{-\dfrac{1}{N_0}\int\limits_0^T [\xi(t) - S_l(t)]^2\,dt\right\}} \gtrless h_0, \quad (14)$$

при $r = 1,2$ и $l \neq r$.

Употребляя запись сигналов в виде рядов Фурье и выражая коэффициенты Фурье помехи α_k и β_k из (6), получим следующее выражение для отношения правдоподобия;

$$\lambda = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2G_0^2}\sum_{k=1}^{K}\mu_k^2\left(a_{1k}^2 - b_{1k}^2\right) + \sum_{k=1}^{K}\left(X_{1k}\cos\varphi_k + Y_{1k}\sin\varphi_k\right)\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2G_0^2}\sum_{k=1}^{K}\mu_k^2\left(a_{2k}^2 + b_{2k}^2\right) - \sum_{k=1}^{K}\left(X_{2k}\cos\varphi_k + Y_{2k}\sin\varphi_k\right)\right\}} \gtrless h_0, \quad (15)$$

где

$$\left|\begin{aligned} X_{ik} &= \frac{\mu_k}{G_0^2}\left(A_k a_{ik} + B_k b_{ik}\right), \\ Y_{ik} &= \frac{\mu_k}{G_0^2}\left(A_k b_{ik} - B_k a_{ik}\right). \end{aligned}\right. \quad (16)$$

$$i = 1,\ 2$$

Для нахождения алгоритма построения решающей схемы необходимо усреднить (15) по флуктуирующим параметрам $u_k = \mu_k \cos\varphi_k$ и $v_k = \mu_k \sin\varphi_k$.

Случай медленных флуктуаций электронной плотности ($\mu_k = \mu = \mathrm{const}$). При этом K-мерная плотность вероятностей фаз спектра сигнала определяется выражением (11) и усредненное отношение правдоподобия Λ будет иметь вид (приближенно для случая малого отношения сигнал-шум).

$$\Lambda = \sum_{k=1}^{K}\left[(X_{1k} - X_{2k})\cos m_k + (Y_{1k} - Y_{2k})\sin m_k\right]\exp\left(-\frac{G_k^2}{2}\right) \gtrless H_0, \quad (17)$$

где

$$H_0 = h_0 e^{\gamma^2} - 1, \quad (18)$$

$$\gamma^2 = \frac{\mu^2}{2G_0^2}\sum_{k=1}^{K}\left[\left(a_{2k}^2 - a_{1k}^2\right) + \left(b_{2k}^2 - b_{1k}^2\right)\right]. \quad (19)$$

Таким образом, приемник должен состоять из К узкополосных фильтров, выделяющих частотные компоненты принятого колебания. Дальнейшие операции над выделенными частотными составляющими будут производиться согласно правилу (17).

Коэффициенты Фурье A_k и B_k выделяются из принятой реализации сигнал плюс шум с помощью схемы, приведенной в [5].

Случай быстрых флуктуаций электронной концентрации (коррелированные). Алгоритм оптимальной обработки принятого колебания будет иметь вид:

$$\Lambda = \frac{2}{P_{1k}P_K}\exp\left\{\left[\frac{\sum_{k=1}^{K}\left[G_{1k}(X_{1k} - X_{2k}) + Q_{1k}\right]}{P_{1k}}\right]^2 + \right.$$

$$+\left[\frac{\sum_{k=1}^{K}[G_{2k}(Y_{1k}-Y_{2k})+Q_{2k}]}{P_{2k}}\right]^2+$$

$$+\sum_{k=1}^{K}[m_{1k}(X_{1k}-X_{2k})+m_{2k}(Y_{1k}-Y_{2k})]+R_k\Bigg\}\lessgtr h_0, \qquad (20)$$

где
$$P_{1k}=2\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{1}{2}-\gamma^2 G_{1k}^2\right),$$

$$P_{2k}=2\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{1}{2}-\gamma^2 G_{2k}^2\right), \qquad (21)$$

$$Q_{1k}=2\gamma^2 G_{1k}m_{1k},$$

$$Q_{2k}=2\gamma^2 G_{2k}m_{2k},$$

$$R_k=\sum_{k=1}^{K}\gamma^2\left(m_{1k}^2+m_{2k}^2\right).$$

Учитывая монотонный характер показательной функции и логарифмируя обе части (20), получим, что решение о наличии сигнала $S_1(t)$ или $S_2(t)$ можно принимать на основании сравнения с некоторым порогом H_0 величины

$$l=\frac{1}{P_{1k}^2}\left\{\sum_{k=1}^{K}[G_{1k}(X_{1k}-X_{2k})]\right\}^2+\frac{1}{P_{2k}^2}\left\{\sum_{k=1}^{K}[G_{2k}(Y_{1k}-Y_{2k})]\right\}^2+$$

$$+\sum_{k=1}^{K}m_{1k}(X_{1k}-X_{2k})+\sum_{k=1}^{K}m_{2k}(Y_{1k}-Y_{2k})\lessgtr H_0, \qquad (22)$$

где
$$H_0=\ln h_0+\ln\frac{P_{1k}-P_{2k}}{2}-R_K. \qquad (23)$$

Быстрые некоррелированные флуктуации концентрации электронов в ионосфере. После усреднения отношения правдоподобия (15) с весом (13) получим оптимальное правило решения

$$\Lambda=\prod_{k=1}^{K}\frac{2}{P_{1k}P_{2k}}\exp\left\{\left[\frac{G_{1k}(X_{1k}+X_{2k})+Q_{1k}}{P_{1k}}\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{G_{2k}(Y_{1k}-Y_{2k})+Q_{2k}}{P_{2k}}\right]^2+m_{1k}(X_{1k}-X_{2k})+m_{2k}(Y_{1k}-Y_{2k})+R_k\right\}\gtrless h_0,$$

$$(24)$$

где

$$\begin{cases} P_{1k} = 1 - 2\gamma^2 G_{1k}^2, \\ P_{2k} = 1 - 2\gamma^2 G_{2k}^2, \\ Q_{1k} = 2\gamma^2 G_{1k} m_{1k}, \\ Q_{2k} = 2\gamma^2 G_{2k} m_{2k}, \\ R_k = \gamma^2 (m_{1k}^2 + m_{2k}^2) \end{cases} \tag{25}$$

Логарифмируя обе части (24) и вынося параметры, не содержащие информации о принимаемом колебании, в значение порога, получим

$$l = \sum_{k=1}^{K} \left\{ \left[\frac{G_{1k}(X_{1k} - X_{2k}) + Q_{1k}}{P_{1k}} \right]^2 + \left[\frac{G_{2k}(Y_{1k} - Y_{2k}) + Q_{2k}}{P_{2k}} \right]^2 + \right.$$

$$\left. + m_{1k}(X_{1k} - X_{2k}) + m_{2k}(Y_{1k} - Y_{2k}) \right\} \gtrless h_0. \tag{26}$$

где
$$H_0 = \ln h_0 + \sum_{k=1}^{K} \left(\ln \frac{P_{1k} + P_{2k}}{2} - R_k \right). \tag{27}$$

§ 3. Оценка помехоустойчивости корреляционного приемника бинарных сигналов, на вход которого поступают сигналы, прошедшие некоторый путь в ионосфере

Логарифм отношения правдоподобен для данного приемника, в общем случае имеет вид [6]

$$q = \frac{2}{N_0} \int_0^T \xi(t) [S_1(t) - S_2(t)] dt \gtrless h, \tag{28}$$

где $S_1(t)$ и $S_2(t)$ — ожидаемые (опорные) сигналы.

Перепишем (28) в виде ряда Фурье

$$q = \frac{1}{G_0^2} \sum_{k=1}^{K} [A_k (a_{1k} - a_{2k}) + B_k (b_{1k} - b_{2k})] \gtrless h. \tag{28a}$$

Ограничимся случаем бинарной симметричной системы [6]. При этом $h=0$.

Предположим, что передается сигнал $S_1(t)$. В этом случае, используя выражение (6), имеем

$$\sum_{k=1}^{K} [(a_{1k}^2 + b_{1k}^2 - a_{1k} a_{2k} - b_{1k} b_{2k}) u_k + (b_{2k} a_{1k} - b_{1k} a_{2k}) v_k] >$$

$$> \sum_{k=1}^{K} [\alpha_k (a_{2k} - a_{1k}) + \beta_k (b_{2k} - b_{1k})],$$

где $$u_k = \mu_k \cos\varphi_k; \quad v_k = \mu_k \sin\varphi_k.$$

Обозначим

$$E' = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\left[(a_{1k}^2 + b_{1k}^2 - a_{1k}a_{2k} - b_{1k}b_{2k})u_k + (b_{2k}a_{1k} - b_{1k}a_{2k})v_k\right], \tag{30}$$

$$\eta = \sum_{k=1}^{K}\left[\alpha_k(a_{2k} - a_{1k}) + \beta_k(b_{2k} - b_{1k})\right]. \tag{31}$$

При фиксированных значениях $u_к$ и $v_к$ случайная величина η имеет нормальное распределение вероятностей с математическим ожиданием и дисперсией, равными соответственно:

$$\begin{aligned} &m(\eta) = 0, \\ &D(\eta) = G_0^2\sum_{k=1}^{K}\left[(a_{2k} - a_{1k})^2 + (b_{2k} - b_{1k})^2\right]. \end{aligned} \tag{32}$$

Вероятность ошибки P — вероятность того, что случайная величина η превысит $2E'$ (нарушится неравенство (29) [5.]:

$$p = \frac{1}{2}\left[1 - \Phi\left(\frac{2E'}{\sqrt{D(\eta)}}\right)\right], \tag{33}$$

где Φ_x — функция Крампа.

Для нахождения вероятности ошибки $\overline{p}$ данного приемника, необходимо усреднить (33) по флуктуирующим параметрам u_k и v_k, распределения вероятностей которых описываются выражениями (11—13).

1) Случай медленных флуктуаций электронной плотности. При этом вероятность ошибки

$$\overline{p} = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left[\frac{\sum_{k=1}^{K}\left[\mu_k L_k\cos(G_k\xi_1 + m_k) - \mu_k T_k\sin(G_k\xi_1 + m_k)\right]}{\sqrt{D(\eta)}}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left(-\frac{\xi_1^2}{2}\right)d\xi_1\right\}, \tag{34}$$

где

$$\begin{cases} L_k = (a_{1k}^2 + b_{1k}^2 - a_{1k}a_{2k} - b_{1k}b_{2k}), \\ T_k = (b_{2k}a_{1k} - b_{1k}a_{2k}). \end{cases} \tag{35}$$

2) Быстрые коррелированные флуктуации:

$$\overline{p} = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left[\frac{\sum_{k=1}^{K} L_k(G_{1k}x + m_{1k}) + T_k(G_{2k}y + m_{2k})}{\sqrt{D(\eta)}}\right]\times\right.$$

$$\times \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{2}\right] dx\,dy\Bigg\} \tag{36}$$

3) Быстрые некоррелированные флуктуации электронной плотности. Вероятность ошибки примет вид

$$\bar{p} = \frac{1}{2}\Bigg\{1 - \frac{1}{G_{11}\ldots G_{1K}G_{21}\ldots G_{2K}(2\pi)^K}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi\left[\frac{\sum\limits_{k=1}^{K}(L_k u_k + T_k v_k)}{\sqrt{D(\eta)}}\right]\times$$

$$\times \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{u_k - m_{1k}}{G_{1k}}\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{v_k - m_{2k}}{G_{2k}}\right)^2\right] du_1\ldots du_K\,dv_1\ldots dv_K\Bigg\}. \tag{37}$$

Таким образом, очевидно, что полученные вероятности ошибок будут больше вероятности ошибки данного приемника, принимающего сигналы из свободного пространства при одних и тех же энергиях излучаемых сигналов.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. П. Долуханов. Распространение радиоволн. Связьиздат. 1965.
2. Ф. Б. Черный. Распространение радиоволн. Изд-во «Советское радио», 1954.
3. В. Л. Гинзбург. Распространение электромагнитных волн в плазме. Изд-во «Наука», 1967.
4. Я. Л. Альперт. Распространение радиоволн и ионосфера. Изд-во АН СССР, 1960.
5. Л. М. Финк. Теория передачи дискретных сообщений. Изд-во «Советское радио», 1963.
6. В. И. Тихонов. Статистическая радиотехника. Изд-во «Советское радио», 1966.
7. Б. Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники. Изд-во «Советское радио», 1966.
8. В. Б. Давенпорт, В. Л. Рут. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. Пер. с англ. под ред. Добрушина Р. Л. Изд-во иностр. лит., 1960.
9. Е. С. Вентцель. Теория вероятностей. Физматгиз, 1964.
10. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.