Б. Я. ЛИХТЦИНДЕР

О ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЯХ МНОГОМЕРНЫХ МОСТОВЫХ ЭЛЕКТРОИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ЦЕПЕЙ

Многомерные мостовые цепи предназначены для измерения матрицы сопротивлений или проводимостей неизвестного электрического многополюсника путем сравнения его с аналогичным эталонным многополюсником [1].

Рассмотрим, в качестве примера, один из вариантов многомерной мостовой цепи, заданной в системе узловых потенциалов [2].

Здесь Y_x и $Y_к$ — соответственно измеряемый и образцовый мно-

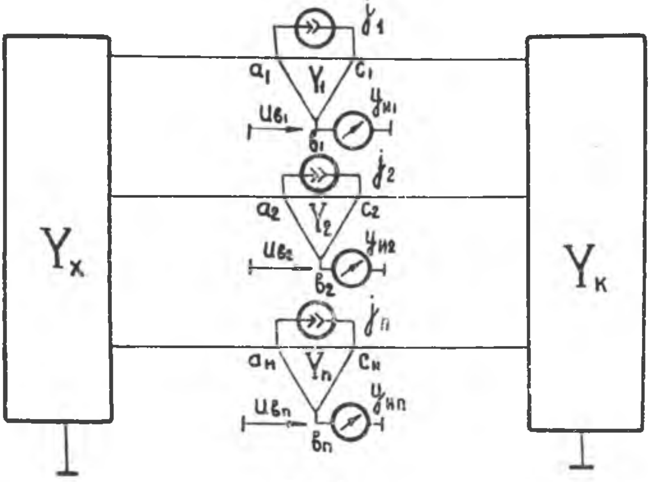

Рис. 1

гополюсники. Y_1, Y_2... Y_n — известные обратимые трехполюсники, не имеющие непосредственной связи с базисным узлом, j_1, j_2 и т. д. — источники задающих токов, y_{n_1}; y_{n_2}... y_{nn} — проводимости нуль-индикаторов. Мостовая цепь считается в равновесии, если при любых значениях задающих токов напряжения $U_{в_1}$; $U_{в_2}$... $U_{в_n}$ на всех нуль-индикаторах тождественно равны нулю.

Можно сказать [2], что для мостовой цепи рис. 1 вектор напряжений на измерителях $\vec{U}_в$ определяется следующим матричным уравнением:

$$\vec{U}_в = M^{-1}\cdot(Y_х Y_{ва}^{-1} - Y_к Y_{вс}^{-1})\cdot N\cdot\vec{j} \qquad (1)$$

Здесь: M и N — матрицы, зависящие от параметров измерительной цепи, объекта измерения $Y_х$ и компенсирующего многополюсника $Y_к$.

$$\vec{U}_в = \begin{bmatrix} U_{в_1} \\ U_{в_2} \\ U_{в_n} \end{bmatrix}; \quad \vec{j} = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_n \end{bmatrix}; \quad Y_{вс} = \begin{bmatrix} Y_{вс_1} & & \\ & Y_{вс_2} & \\ & & Y_{вс_n} \end{bmatrix}; \quad Y_{AB} = \begin{bmatrix} Y_{AB_1} & & \\ & Y_{AB_2} & \\ & & Y_{AB_n} \end{bmatrix}$$

Из соотношения (1) следует, что вектор напряжений $\vec{U}_в$ на измерителях тождественно равен нулю, если выполняется условие:

$$Y_х Y_{ва}^{-1} = Y_к Y_{вс}^{-1}. \qquad (2)$$

В отличие от условия равновесия обычных мостовых цепей здесь все элементы являются матрицами. Весьма существенно, что в многомерной мостовой цепи условие равновесия не зависит от параметров измерителей, а также от вектора задающих токов $\vec{j}$.

Матричному уравнению (1) соответствует система из n-скалярных уравнений, в которых неизвестны элементы матрицы $Y_х$. В общем случае, матрица $Y_х$ имеет n^2 элементов, которые невозможно определить однозначно на основании имеющихся n-уравнений. Поэтому в мостовой цепи необходимо создать последовательно n режимов, придавая поочередно вектору $\vec{j}$ различные значения $\vec{j}_\nu$. Естественно, при этом считать все источники задающих токов, кроме j_ν, равными нулю. То есть

$$\vec{j}_\nu = \begin{bmatrix} 0 \\ j_\nu \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Получающийся в указанном случае вектор напряжений на измерителях обозначим через $\vec{U}_\nu$; таким образом, имеем систему из n-матричных уравнений:

$$\left.\begin{array}{l}
\vec{U}_1 = [F(Y_x)]\vec{j}_1 = \begin{Vmatrix} u_{11} \\ u_{n1} \end{Vmatrix} \\
\dots \\
\vec{U}_\nu = [F(Y_x)]\vec{j}_\nu = \begin{Vmatrix} u_{1\nu} \\ u_{n\nu} \end{Vmatrix} \\
\dots \\
\vec{U}_n = [F(Y_x)]\vec{j}_n = \begin{Vmatrix} u_{1n} \\ u_{nn} \end{Vmatrix}
\end{array}\right| \quad (4)$$

$$\text{где } [F(Y_x)] = M^{-1}(Y_x Y_{\text{ва}}^{-1} - Y_\text{к} Y_{\text{вс}}^{-1}) N = \begin{array}{|c|c|c|} \hline f_{11} & f_{12} & f_{1n} \\ \hline f_{21} & f_{22} & f_{2n} \\ \hline f_{n1} & f_{n2} & f_{nn} \\ \hline \end{array} \quad (5)$$

После подстановки (5) в (4), с учетом (3), получим систему из скалярных уравнений:

$$\left.\begin{array}{l}
u_{11} = f_{11}(y_{x11} \dots y_{x1n} \dots y_{x\alpha\beta} \dots y_{x\,nn})\, j_1 \\
\dots \\
u_{n1} = f_{n1}(y_{x11} \dots y_{x1n} \dots y_{x\alpha\beta} \dots y_{x\,nn})\, j_1 \\
\dots \\
u_{\text{к}\nu} = f_{\text{к}\nu}(y_{x11} \dots y_{x1n} \dots y_{x\alpha\beta} \dots y_{x\,nn})\, j_\nu \\
\dots \\
u_{nn} = f_{nn}(y_{x11} \dots y_{x1n} \dots y_{x\alpha\beta} \dots y_{x\,nn})\, j_n
\end{array}\right| \quad (6)$$

Здесь, как это следует из (4), $u_{\text{к}\nu}$ — есть напряжение на κ—м измерителе, при питании мостовой цепи от одного источника j_ν . Приращение любого элемента матрицы Y_x вызовет соответствующие изменения всех напряжений на нуль-индикаторах. Так, например, чувствительность напряжения $U_{\text{к}\nu}$ к изменению элемента $y_{x\alpha\beta}$, находящегося на пересечении α-й строки и β-го столбца матрицы Y_x, определяется частной производной:

$$S_{y\alpha\beta}^{u_{\text{к}\nu}} = \frac{\partial u_{\text{к}\nu}}{\partial y_{x\alpha\beta}} = \frac{\partial f_{\text{к}\nu} \cdot j_\nu}{\partial y_{x\alpha\beta}} . \quad (7)$$

Назовем ее — «скалярной чувствительностью».

Следует заметить, что в случае мостов переменного тока скалярная чувствительность может быть комплексной. С учетом соотношения (7) полный дифференциал каждого из напряжений имеет следующий вид:

$$\left.\begin{array}{l}
du_{11} = S_{y_{11}}^{u_{11}} dy_{x_{11}} + \dots S_{y_{1n}}^{u_{11}} dy_{x_{1n}} + \dots S_{y_{\alpha\beta}}^{u_{11}} dy_{x_{\alpha\beta}} + \dots S_{y_{nn}}^{u_{11}} dy_{x\,nn} \\
\dots \\
du_{n1} = S_{y_{11}}^{u_{n1}} dy_{x_{11}} + \dots S_{y_{1n}}^{u_{n1}} dy_{x_{1n}} + \dots S_{y_{\alpha\beta}}^{u_{n1}} dy_{x_{\alpha\beta}} + \dots S_{y_{nn}}^{u_{n1}} dy_{x_{nn}}; \\
\dots \\
du_{\text{к}\nu} = S_{y_{11}}^{u_{\text{к}\nu}} dy_{x_{11}} + \dots S_{y_{1n}}^{u_{\text{к}\nu}} dy_{x_{1n}} + \dots S_{y_{\alpha\beta}}^{u_{\text{к}\nu}} dy_{x_{\alpha\beta}} + \dots S_{y_{nn}}^{u_{\text{к}\nu}} d_{x_{nn}} \\
\dots \\
du_{nn} = S_{y_{11}}^{u_{nn}} dy_{x_{11}} + \dots S_{y_{1n}}^{u_{nn}} dy_{x_{1n}} + \dots S_{y_{\alpha\beta}}^{u_{nn}} dy_{x_{\alpha\beta}} + \dots S_{y_{nn}}^{u_{\text{к}\nu}} d_{x_{nn}}
\end{array}\right\} . \quad (8)$$

В матричной форме получим:

$$d\begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{n1} \\ U_{k\nu} \\ U_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^{U_{11}}_{y_{11}} & S^{U_{11}}_{y_{1n}} & S^{U_{11}}_{y_{\alpha\beta}} & S^{U_{11}}_{y_{nn}} \\ S^{U_{n1}}_{y_{11}} & S^{U_{n1}}_{y_{1n}} & S^{U_{n1}}_{y_{\alpha\beta}} & S^{U_{n1}}_{y_{nn}} \\ S^{U_{k\nu}}_{y_{11}} & S^{U_{k\nu}}_{y_{1n}} & S^{U_{k\nu}}_{y_{\alpha\beta}} & S^{U_{k\nu}}_{y_{nn}} \\ S^{U_{nn}}_{y_{11}} & S^{U_{nn}}_{y_{1n}} & S^{U_{nn}}_{y_{\alpha\beta}} & S^{U_{nn}}_{y_{nn}} \end{bmatrix} d\begin{bmatrix} y_{x_{11}} \\ y_{x_{1n}} \\ y_{x_{\alpha\beta}} \\ y_{x_{nn}} \end{bmatrix}$$

Указанную матрицу порядка n^2, составленную из скалярных чувствительностей, назовем полной матричной чувствительностью многомерной мостовой электроизмерительной цепи и обозначим $[S^{\nu}_{Y}]$. Запишем матричное соотношение (9) в блочной форме:

$$d\begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{U}_\nu \\ \vec{U}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^{U_1}_{Y_1} & S^{U_1}_{Y_\beta} & S^{U_1}_{Y_n} \\ S^{U_\nu}_{Y_1} & S^{U_\nu}_{Y_\beta} & S^{U_\nu}_{Y_n} \\ S^{U_n}_{Y_1} & S^{U_n}_{Y_\beta} & S^{U_n}_{Y_n} \end{bmatrix} d\begin{bmatrix} \vec{Y}_{x_1} \\ \vec{Y}_{x_\beta} \\ \vec{Y}_{x_n} \end{bmatrix} \qquad (10)$$

где

$$S^{U_\nu}_{Y_\beta} = \begin{bmatrix} S^{U_{1\nu}}_{y_{1\beta}} & S^{U_{1\nu}}_{y_{n\beta}} \\ S^{U_{n\nu}}_{y_{1\beta}} & S^{U_{n\nu}}_{y_{n\beta}} \end{bmatrix}; \quad \vec{Y}_{x_\beta} = \begin{bmatrix} y_{x_{1\beta}} \\ y_{x_{n\beta}} \end{bmatrix}, \qquad (11)$$

Матрицу порядка n, определяемую соотношением (II), будем называть частной матричной чувствительностью.

Нетрудно показать, что частная матричная чувствительность $S^{U_\nu}_{Y_\beta}$ есть производная вектора $\vec{U}_\nu$ по вектору $\vec{Y}_{x\beta}$, то есть

$$S^{U_\nu}_{Y\beta} = \frac{d\vec{U}_\nu}{d\vec{Y}_{x\beta}} = \frac{dF\,(Y_x\,)}{d\vec{Y}_{x\beta}} \cdot \vec{y}_\nu\,. \qquad (12)$$

Понятие частной матричной чувствительности в математике получило название Якобиана (Л3) и играет существенную роль в анализе сходимости процесса уравновешивания многомерных мостовых цепей.

Так, например, если частные матричные чувствительности равны нулю для всех $\nu \neq \beta$, то матричное уравнение (10) распадается на n независимых уравнений (13):

$$\left.\begin{aligned} d\vec{U}_1 &= S_{Y_1}^{U_1} d\vec{Y}_{x_1} \\ &\dots \\ d\vec{U}_\nu &= S_{Y_\nu}^{U_\nu} d\vec{Y}_{x_\nu} \\ &\dots \\ d\vec{U}_n &= S_{Y_n}^{U_n} d\vec{Y}_{x_n} \end{aligned}\right| . \tag{13}$$

При этом имеем независимое уравновешивание по столбцам матрицы Y_x.

Если в многомерной мостовой цепи нуль-индикаторы реагируют на токи, то для нее целесообразно ввести понятия матричных чувствительностей по току $[S_Y^I]$. Аналогично, при анализе мостовых цепей, предназначенных для измерения сопротивлений многополюсников, существенное значение имеют матричные чувствительности $[S_z^I]$ и $[S_z^U]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Я. Лихтциндер. Многопараметрические электроизмерительные цепи сравнения. Тезисы докладов на межвузовской конференции по разработке и применению средств информационно-измерительной техники. Пенза, 1967.
2. Б. Я. Лихтциндер. Обобщенный анализ электроизмерительных цепей сравнения. Доклад на заседании научно-методической комиссии МВ и ССО СССР по информационной технике, Новосибирск, 1968.
3. Ф. Р. Гантмахер. «Теория матриц». Издательство «Наука», Москва, 1967.

Куйбышевский
Авиационный институт
№ 327425
БИБЛИОТЕКА