Р. Н. СТАРОБИНСКИЙ

ОБ ОДНОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ОЦЕНКЕ ВРЕМЕНИ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА

В ряде систем автоматического регулирования, где исполнительными органами являются сервомоторы или интегрирующие звенья других типов, основной характеристикой переходного процесса является интегральное значение реакции системы на входное возмущение, а время переходного процесса удобно оценивать по изменению среднеинтегрального значения реакции системы.

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t y(t)\,dt. \tag{1}$$

Рассмотрим устойчивую статическую систему с передаточной функцией $W(p)$

$$Y(p) = W(p)\,X(p).$$

Не нарушая общности, можно положить

$$W(0) = 1.$$

Исследуем реакцию системы на скачкообразное возмущение

$$x(t) = 1(t).$$

С точки зрения изменения среднего значения реакции (1) удобно представить переходный процесс как сумму стандартного запаздывающего переходного процесса — $1(t-\tau_1)$ с постоянной времени, равной групповому запаздыванию при $\omega=0$.

$$\tau_1 = -\frac{\partial}{\partial\omega}\arg W(i\omega)\Big|_{\omega=0} \tag{2}$$

и переходной погрешности первого рода

$$y_{1п}(t) = y(t) - 1(t-\tau_1). \tag{3}$$

Постоянную времени τ_1 можно определить так же, как площадь под кривой переходной погрешности $y_п(t)=y(t)-1$, взятую с обратным знаком —

$$\tau_1 = -\int_0^\infty y_п(t)\,dt, \tag{4}$$

По аналогии с (4) определим постоянную времени для второй составляющей переходного процесса как часть площади под кривой среднего значения переходной погрешности первого рода —

$$\tau_2 = -\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t}\int_{\infty}^{t} y_{1п}(t)\,dt. \tag{5}$$

Для оценки быстродействия системы по интегральным характеристикам введем

$$\tau = \tau_1 + \tau_2. \tag{6}$$

Слагаемые в выражении (6) могут иметь разные знаки.

Для звена чистого запаздывания $W(p) = e^{-p\tau_{зап}}$

$$\tau_2 = 0 \quad \tau = \tau_1 = \tau_{зап};$$

для консервативного колебательного звена $W(p) = \dfrac{1}{T^2p^2+1}$ —

$$\tau_1 = 0; \;\; \tau = \tau_2 = T.$$

Коэффициент $\frac{2}{\pi}$ в формуле (5) выбран таким образом, чтобы параметр τ колебательного звена был равен его постоянной времени.

Определенное по формуле (6) время τ характеризует изменение во времени среднего значения переходной функции.

Например, для апериодического звена $W(p)\dfrac{1}{T_а p+1}$

$$\tau_1 = T_a; \;\; \tau_2 = -0{,}269T_a; \;\; \tau = 0{,}731T_a.$$

Для рассмотренных трех переходных процессов (колебательного, запаздывающего и апериодического звеньев) среднее значение реакции $\overline{y}_1 \approx 0{,}45$ достигается при $t \approx 1{,}82\tau$. Эта особенность оказывается справедливой для широкого класса переходных процессов.

Определение τ по характеристикам в области изображения

Преобразуя выражение (4) в область оригинала, получим:

$$\tau_1 = -\lim_{p\to 0} Y_п(p) = -\frac{\partial W(p)}{\partial p} = -Y_п(0), \tag{7}$$

где
$$Y_{\text{п}}(p)=\frac{W(p)-1}{p}.$$

τ_2 определим вначале для $\tau_1 \geqslant 0$. В этом случае

$$Y_{1\text{п}}=\frac{W(p)-e^{-\tau_1 p}}{p} \qquad (8)$$

и

$$\tau_2=-\lim_{p\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^p Y_{1\text{п}}(p)\frac{dp}{p}. \qquad (9)$$

Для упрощения интегрирования представим $e^{-\tau_1 p}$ в виде

$$e^{-\tau_1 p}=\frac{1}{\tau_1 p+1}+\left\{e^{-\tau_1 p}-\frac{1}{\tau_1 p+1}\right\},$$

при этом выражение (9) принимает вид

$$\tau_2=-\lim_{p\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^p Y_{2\text{п}}(p)\frac{dp}{p}-\alpha\tau_1, \qquad (10)$$

где

$$Y_{2\text{п}}=\frac{1}{p}\left\{W(p)-\frac{1}{\tau_1 p+1}\right\}, \qquad (11)$$

$$\alpha=\frac{1}{\tau_1}\lim_{p\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^p\frac{1}{p^2}\left(e^{-\tau_1 p}-\frac{1}{\tau_1 p+1}\right)dp\approx 0{,}269.$$

Интегрирование выражения (10) проще, так как в случае разложения $W(p)$ на простые дроби подынтегральное выражение представляет собой дробно-рациональную функцию.

В случае $\tau_1<0$ применение выражений (8—11) невозможно ввиду того, что функция $e^{-\tau_1 p}$ уже не является изображением для $1(t-\tau_1)$, для $\tau_1<0$. Поэтому выражение (5) требует предварительного преобразования в области оригинала.

Интеграл (5) для $\tau_1<0$ расходится при $t=0$, однако, если под его значением понимать главное значение интеграла, то оно конечно и может быть легко вычислено. В этом случае значение интеграла не изменится, если к подынтегральному выражению добавить любую нечетную ограниченную интегрируемую функцию t.

В качестве такой функции выберем

$$z(t)=-[1(t-\tau_1)-1]+[1-1(t+\tau_1)],$$

тогда

$$\tau_2=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{dt}{t}\int_0^\infty y_{3\text{п}}(t)\,dt, \qquad (12)$$

где $y_{3\text{п}}(t)=y_{1\text{п}}(t)+z(t)$.
В области изображения

$$\tau_2=-\lim_{p\to 8}\frac{2}{\pi}\int_0^p Y_{3\text{п}}(p)\frac{dp}{p}, \qquad (13)$$

или

$$\tau_2 = -\lim_{p\to\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^p Y_{4п}(p) \frac{dp}{p} - \alpha_1 \tau_1, \tag{14}$$

где

$$Y_{3п}(p) = \frac{W(p)-2}{p} - \frac{e^{-\tau_1 p}}{p},$$
$$Y_{4п}(p) = \frac{1}{p}\left\{W(p) - \frac{-2\tau_1 p + 1}{-\tau_1 p + 1}\right\}. \tag{15}$$

Отметим, что под $W(p)$ мы понимаем передаточную функцию устойчивой системы (т. е. $W(p)$ не имеет полюсов в правой полуплоскости). Путь интегрирования в (10) и (14) можно выбирать любым в правой полуплоскости. Если известно аналитическое выражение для $W(p)$, то удобнее всего выбирать путь интегрирования по действительной оси плоскости комплексного переменного ($Im\,p = 0$).

Определение τ по корням характеристического уравнения

Предположим, что $W(p)$ может быть разложена на простые дроби

$$W(p) = \sum_1^n \frac{a_j}{T_j\, p + 1}, \tag{16}$$

где $T_j = -\frac{1}{p_j}$, а p_j — корни характеристического уравнения.

В этом случае в силу $W(0) = 1$ имеет место равенство

$$\sum_1^n a_j = 1.$$

Из (7) непосредственно следует:

$$\tau_1 = \sum_1^n a_j\, T_j = \sum_1^n \Delta\tau_{1j}, \tag{17}$$

где $\Delta\tau_{1j} = a_j\, T_j$.

Для τ_2 при $\tau_1 \neq 0$ из (10) и (14) после интегрирования имеем

$$\tau_2 = \frac{2}{\pi} \sum_1^n a_j\, T_j \ln \frac{|\tau_1|}{T_j} - \alpha_1 \tau_1, \tag{18}$$

для $\tau_1 = 0$

$$\tau_2 = \frac{2}{\pi} \sum_1^n a_j\, T_j \ln \frac{1}{T_j}, \tag{19}$$

или

$$\tau_2 = \sum_1^n \Delta\tau_{2j},$$

где $$\Delta\tau_{2j} = \Delta\tau_{1j}\,\frac{2}{\pi}\ln\frac{0{,}655\,|\tau_1|}{T_j} \quad \text{для } \tau_1 \neq 0 \qquad (20)$$

и $$\Delta\tau_{2j} = \Delta\tau_{1j}\,\frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{T_j} \quad \text{для } \tau_1 = 0.$$

В случае комплексных T_j функцию $W(p)$ удобнее представлять в виде

$$W(p) = \sum_{2m}^{n}\frac{a_j}{T_j p + 1} + \sum_{1}^{m}\frac{T_{1j}\,p + b}{(T_j p + 1)(T_j^* p + 1)}. \qquad (21)$$

Во второй сумме объединены все простые дроби, содержащие пары комплексно-сопряженных корней. Для функций, стоящих под знаком второй суммы вместо (17) и (20), удобнее использовать выражения (22)

$$\Delta\tau'_{1j} = b_j\,2ReT_j - T_{1j},$$

$$\Delta\tau'_{2j} = \Delta\tau'_{1j}\,\frac{2}{\pi}\ln\frac{0{,}655\,|\tau_1|}{|T_j|} + \frac{2}{\pi}\{T_{1j} - b_j\,|T_j|\cos 2\varphi\}\,\frac{\varphi}{\sin\varphi}; \qquad (22)$$

$$У = \arg T_j;$$

для $\tau_1 = 0$ вместо $0{,}665|\tau_1|$ следует подставлять единицу.

Если $\Sigma|a_j| + \Sigma|b_j| < 3$, т. е. когда коэффициенты усиления парциальных экспонент и синусоид в переходном процессе не намного превосходят (по модулю) суммарный коэффициент усиления системы, с достаточной точностью можно положить время достижения $\overline{y}(t) \approx 0{,}45$ при $t \approx 1{,}82\,\tau$.

Вычисление τ по частотным характеристикам

Если заданы частотные характеристики системы $W(i\omega)$, то постоянные времени τ_1 и τ_2 могут быть определены из анализа мнимой части частотной характеристики ($ImW(i\omega)$).

Так как функция $W(p)$ регулярна в точке $p=0$ и ее производная в этой точке $\left.\frac{\partial W(p)}{\partial p}\right|_{p=0}$ действительна и не зависит от направления дифференцирования, то

$$\left.\frac{\partial ReW(i\omega)}{\partial i\omega}\right|_{\omega=0} = 0$$

и $$\tau_1 = -\left.\frac{\partial Im\,W(i\omega)}{\partial\omega}\right|_{\omega=0}; \qquad (23)$$

τ_1 может быть также определено из соотношения (1).

Аналогично, ввиду того, что интегралы (10) и (14) не зависят от пути интегрирования в правой полуплоскости и τ_2 действительная величина, для функций, не имеющих полюсов на мнимой оси, имеет место равенство

$$\tau_2 = -\frac{2}{\pi}\lim_{\omega\to\infty}\int_0^{\omega}\left\{\frac{Im\,W(i\omega)}{\omega} + \frac{\tau_1}{\tau_1^2\omega^2 + 1}\right\}\frac{d\omega}{\omega} - \alpha_1\tau_1, \qquad (24)$$

Если неизвестно точное аналитическое выражение для $ImW(i\omega)$, интеграл в выражении (24) может быть взят графически. Для этого его удобно представить в виде

$$\int_0^\infty \Phi(\omega)\,d\omega = \int_0^{\omega_{\text{гр}}} \Phi(\omega)\,d\omega - \int_0^{x_{\text{гр}}} \Phi_1(x)\,dx, \tag{25}$$

где $x = \frac{1}{\omega}$; $\Phi_1(x) = \Phi\left(\frac{1}{\omega}\right)$.

Первый интеграл вычисляется заменой $ImW(\omega)$ отрезками прямых, причем при начальном участке

$$ImW(i\omega) = -\tau_1\omega.$$

Формулы для вычисления интегралов для отдельных участков

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2}\left\{ImW(\omega) - \frac{\tau_1\omega}{\tau_1^2\omega^2+1}\right\}\frac{d\omega}{\omega^2} =$$

$$= (\theta + \tau_1)\ln\frac{\omega_2}{\omega_1} - \frac{\tau_1}{2}\ln\frac{(\omega_2\tau_1)^2+1}{(\omega_1\tau_1)^2+1} +$$

$$+ \frac{1}{\omega_2\omega_1}\left\{ImW(\omega)_{\text{ср}}\,\Delta\omega - \Delta ImW(\omega)\,\omega_{\text{ср}}\right\},$$

где

$$\Delta ImW(\omega) = ImW(\omega_2) - ImW(\omega_1); \quad \Delta\omega = \omega_2 - 1$$

$$ImW(\omega)_{\text{ср}} = \frac{ImW(\omega_2) + ImW(\omega_1)}{2};$$

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}; \quad \theta = \frac{\Delta ImW(\omega)}{\Delta\omega};$$

для первого участка

$$\int_0^{\omega_2}\left\{ImW(\omega) - \frac{\tau_1\omega}{\tau_1^2\omega^2+1}\right\}\frac{d\omega}{\omega^2} = -\frac{\tau_1}{2}\ln\frac{(\omega_2\tau_1)^2+1}{1}.$$

Второй интеграл в выражении (25) вычисляется графически; $x_{\text{гр}}$ выбирается из условий обеспечения необходимой точности.

Предложенный интегральный критерий оценки времени переходных процессов может быть использован для сравнительной оценки переходных процессов сильно колебательных систем.