О. И. Ульянов

ПОГРЕШНОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНО-КООРДИНАТНОГО КОМПЕНСАТОРА ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Конечной целью измерения прямоугольно-координатным компенсатором является определение модуля U и фазы δ измеряемого вектора напряжения $\dot{U}$.

Нормировать погрешность компенсатора нужно так, чтобы при этом нормировалась погрешность в определении фазы и модуля измеряемого напряжения.

Согласно действующей инструкции 190—56 по поверке компенсаторов переменного тока [1] нормируются погрешности Δ_x и Δ_y в показаниях по шкалам составляющих $U_{кx}$ и $U_{кy}$ следующими формулами:

$$\Delta_x \leqslant aU_{kx} + u_x \tag{1}$$

$$\Delta_y \leqslant bU_{ky} + u_y, \tag{2}$$

где u_x и u_y — цены наименьших делений шкал компенсатора, b. a и b — постоянные коэффициенты, которые могут иметь только значения $2\cdot 10^{-3}$, $5\cdot 10^{-3}$, $1\cdot 10^{-2}$.

Такой способ нормирования погрешностей компенсатора удобен с точки зрения поверки точности компенсатора, но он не дает непосредственного ответа на главный вопрос, возникающий у экспериментатора при использовании компенсатора переменного тока как измерительного прибора: с какой погрешностью он оценит модуль и фазу измеряемого напряжения. Поэтому рассмотрим как зависит погрешность в определении модуля и фазы измеряемого напряжения $\dot{U}$ от погрешностей в измерении ортогональных составляющих $U_{кx}$ и $U_{кy}$. На рис. 1 представлена диаграмма, иллюстрирующая общий случай измерения вектора $\dot{U}$. Из диаграммы видно [2], что абсолютные погрешности Δ_x и Δ_y в отсчете составляющих предопределяют максимальную возможность погрешность $\Delta U_{\text{макс}}$ в определении модуля. Максимум погрешности имеет место, если вместо действительных значений $U_{кx}$ и $U_{кy}$ отсчитаны значения $U_{кx}+\Delta$ и $U_{кy}+\Delta_y$. В этом случае

$$\Delta U_{\text{макс}} = U'_{kx} - U_{kx} = \sqrt{(U_{kx}+\Delta_x)^2 + (U_{ky}+\Delta_y)^2} - \sqrt{U^2_{kx}+U^2_{ky}}. \tag{3}$$

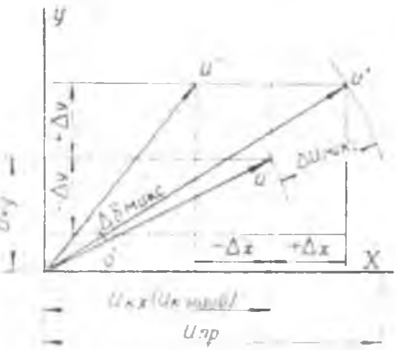

Рис. 1. Зависимость погрешностей в определении модуля и фазы измеряемого вектора от погрешностей в измерении ортогональных составляющих.

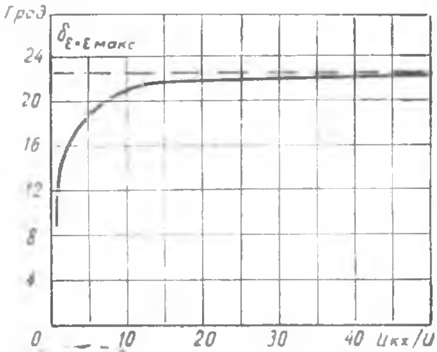

Рис. 2 Значения δ, при которых имеет место максимум погрешности в определении модуля, для разных отношений $\frac{U_{кx}}{u}$.

Относительная погрешность в определении модуля найдется как

$$\varepsilon_{\text{макс}} = \frac{\cos\delta}{U_{kx}}\sqrt{(U_{kx}+\Delta_x)^2 + (U_{ky}+\Delta_y)^2} - 1. \tag{4}$$

Если учесть, что обычно $a = b$ и $u_x = u_y = u$, то (1) и (2) преобразуются к виду

$$\Delta_x = aU_{kx} + u \tag{5}$$

$$\Delta_y = bU_{ky} + u = a\cdot U_{kx}\cdot \operatorname{tg}\delta \tag{6}$$

и, следовательно, (4) можно переписать так

$$\varepsilon_{\text{макс}} = \sqrt{1+2a+a^2+\frac{u(1-a)}{U_{kx}} + \frac{u\cos 2\delta}{U_{kx}}\left(1+a+\frac{u}{U_{kx}}\right) + \frac{u\sin 2\delta}{U_{kx}}(1-a)} - 1. \tag{7}$$

Анализ (7) показывает, что наибольший максимум погрешности имеет место при

$$\operatorname{tg} 2\delta = \frac{1}{1+\dfrac{u}{(1-a)U_{kx}}} \approx \frac{1}{1+\dfrac{u}{U_{kx}}}. \tag{8}$$

По (8) строим (рис. 2) зависимость $\delta = f\left(\frac{U_{kx}}{u}\right)$, показывающую, что при $\frac{U_{kx}}{u} > 10$ максимум относительной погрешности в определении модуля будет при значениях угла δ, близких к $22°30'$.

Учитывая, что $a \ll 1$, можно (7) упростить до вида

$$\varepsilon_{\text{макс}} = \sqrt{1 + 2a + \frac{u}{U_{kx}}\left(1 + \cos 2\delta + \sin 2\delta + \frac{u}{U_{kx}} 2\cos\delta\right)} - 1. \qquad (9)$$

Строго говоря, формула (9) действительна для $\delta = 0$—$45°$, т. е. пока $U_{\kappa x}$ является большей из составляющих. Но такие же рассуждения можно было бы привести и для $\delta = 45$—$90°$ и получить аналогичную формулу, в которой вместо $U_{\kappa x}$ будет $U_{\kappa y}$, также являющаяся большей из составляющих. Таким образом, формулу (9) можно считать действительной для любого угла δ, если ее переписать в таком виде

$$\varepsilon_{\text{макс}} = \sqrt{1 + 2a + \frac{u}{U_{\text{к наиб}}}\left(1 + \cos 2\delta + \sin 2\delta + \frac{u}{U_{\text{к наиб}}} \cos 2\delta\right)} - 1, \qquad (10)$$

где $U_{\text{к наиб}}$ — большая из двух ортогональных составляющих измеренного вектора.

Для практических расчетов удобно было бы исключить из формулы угол δ. При $\frac{U_{\text{к наиб}}}{u} > 20$ с практически достаточной точностью погрешность можно определить как

$$\varepsilon_{\text{макс}} = \sqrt{1 + 2a + 2{,}414\,\frac{u}{U_{\text{к наиб}}}} - 1. \qquad (11)$$

По (11) строим графики рис. 3.

Можно предложить и другой метод определения погрешности модуля измеряемого вектора. Модуль определяется по отсчитанным с помощью шкал компенсатора составляющим $U_{\kappa x}$ и $U_{\kappa y}$, т. е. $U = f(U_{\kappa x}, U_{\kappa y})$, следовательно, абсолютная погрешность в определении модуля U равна

$$dU = \frac{\partial U}{\partial U_{kx}} \cdot \Delta_x + \frac{\partial U}{\partial U_{ky}} \cdot \Delta_y,$$

относительная погрешность

$$\varepsilon = \frac{dU}{U} = \frac{1}{U}\left(\frac{\partial U}{\partial U_{kx}} \cdot \Delta_x + \frac{\partial U}{\partial U_{ky}} \cdot \Delta_y\right),$$

где

$$\Delta_x = \varepsilon_x \cdot U_{kx};\quad \Delta_y = \varepsilon_y \cdot U_{ky};\quad U = \sqrt{U_{kx}^2 + U_{ky}^2}$$

и, следовательно,

$$\varepsilon = \left(\frac{U_{kx}}{U}\right)^2 \varepsilon_x + \left(\frac{U_{ky}}{U}\right)^2 \varepsilon_y = \varepsilon_x \cdot \cos^2\delta + \varepsilon_y \cdot \sin^2\delta. \quad (12)$$

Учитывая (5) и (6), получим, что

$$\varepsilon_x = a + \frac{u}{U_{kx}}, \quad (13)$$

$$\varepsilon_y = a + \frac{u}{U_{kx} \cdot \operatorname{tg}\delta} \quad (14)$$

и тогда

$$\varepsilon = a + \frac{u}{2U_{kx}}(1 + \sin 2\delta + \cos 2\delta). \quad (15)$$

Максимум погрешности будет при угле δ, значение которого является корнем уравнения $[\varepsilon]^1 = 0$, т. е., как показывает решение этого уравнения, при $\delta_{\varepsilon=\varepsilon\,\text{макс}} = 22°30'$. Следовательно,

$$\varepsilon_{\text{макс}} = a + 1{,}207\,\frac{u}{U_{kx}}.$$

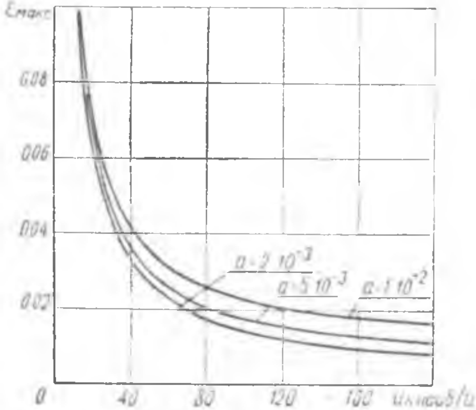

Рис. 3. Зависимость максимума погрешности в определении модуля от относительного значения наибольшей из ортогональных составляющих.

В общем случае

$$\varepsilon_{\text{макс}} = a + 1{,}207\,\frac{u}{U_{\text{к наиб}}}. \quad (16)$$

Результаты подсчетов по (16) и (11) практически совпадают, поэтому можно считать, что графики рис. 3 соответствуют и формуле (16). Как более простую и удобную ее можно рекомендовать для практического вычисления погрешности в определении модуля в процессе измерения компенсатором.

Для выяснения способа оценки погрешности в определении фазы вернемся к рис. 1. Наибольшая погрешность $\Delta\delta_{\text{макс}}$ в определении фазового угла δ имеет место, если отсчитаны значения составляющих $U_{кx} - \Delta_x$ и $U_{кy} + \Delta_y$. В этом случае

$$\operatorname{tg}\Delta\delta_{\text{макс}} = \frac{\Delta_y \cdot \cos\delta + \Delta_x \cdot \sin\delta}{\dfrac{U_{\text{к наиб}}}{\cos\delta} - \Delta_x \cos\delta + \Delta_y \sin\delta}. \quad (17)$$

С учетом (5) и (6) получим

$$\operatorname{tg}\Delta\delta_{\text{макс}} = \frac{a\,\dfrac{U_{\text{к наиб}}}{u}\sin 2\delta + 0{,}5\,(\sin 2\delta + \cos 2\delta + 1)}{\dfrac{U_{\text{к наиб}}}{u} + a\,\dfrac{U_{\text{к наиб}}}{u}\cos 2\delta - 0{,}5\,(\cos 2\delta - \sin 2\delta + 1)}. \quad (18)$$

Учитывая, что $\cos 2\delta - \sin 2\delta + 1 \leq 2$ и пренебрегая $a \frac{U_{\text{к наиб}}}{u} \cos 2\delta$ по сравнению с $\frac{U_{\text{к наиб}}}{u}$, получим более простую формулу, несколько завышающую результат при малых $\frac{U_{\text{к наиб}}}{u}$

$$\operatorname{tg} \Delta \delta_{\text{макс}} = \frac{\frac{U_{\text{к наиб}}}{u} \sin 2\delta + 0{,}5 (\sin 2\delta + \cos 2\delta + 1)}{\frac{U_{\text{к наиб}}}{u} - 1}. \tag{19}$$

Максимум погрешности, как следует из анализа (19), будет при

$$\operatorname{tg} 2\delta = 2a \frac{U_{\text{к наиб}}}{u} + 1. \tag{20}$$

Имея в виду, что $1 + \sin 2\delta + \cos 2\delta \leq 2{,}414$, можно произвести дальнейшее упрощение

$$\operatorname{tg} \Delta\delta_{\text{макс}} = \frac{a \frac{U_{\text{к наиб}}}{u} \sin 2\delta + 1{,}207}{\frac{U_{\text{к наиб}}}{u} - 1}. \tag{21}$$

Приравнивая производную этого выражения нулю, найдем, что максимум погрешности будет при $\delta = 45°$, тогда

$$\operatorname{tg} \Delta \delta_{\text{макс}} = \frac{a + \frac{u}{U_{\text{к наиб}}} 1{,}207}{1 - \frac{u}{U_{\text{к наиб}}}} = \frac{a \frac{U_{\text{к наиб}}}{u} + 1{,}207}{\frac{U_{\text{к наиб}}}{u} - 1}. \tag{22}$$

$$\lim \operatorname{tg} \Delta \delta_{\text{макс}} = a.$$

$$\frac{U_{\text{к наиб}}}{u} \to \infty.$$

Это позволяет определить, что с ростом $U_{\text{к наиб}}$ погрешность в определении фазы приближается

при $a = 2 \cdot 10^{-3}$ к $\Delta\delta_{\text{макс}} = 6{,}9'$,

при $a = 5 \cdot 10^{-3}$ к $\Delta \delta_{\text{макс}} = 17{,}25'$,

при $a = 1 \cdot 10^{-2}$ к $\Delta \delta_{\text{макс}} = 34{,}5'$.

Согласно правилам приближенных вычислений можем считать

$$\Delta \delta^{0}_{\text{макс}} = 57{,}3 \cdot \operatorname{tg} \Delta \delta_{\text{макс}} = \frac{57{,}3 \left(a \frac{U_{\text{к наиб}}}{u} + 1{,}207 \right)}{\frac{U_{\text{к наиб}}}{u} - 1}. \tag{23}$$

Рассмотрим и другой способ вывода формулы для определения $\Delta\delta_{\text{макс}}$.

$$\delta = \operatorname{arctg}\frac{U_{ky}}{U_{kx}},$$

тогда

$$\Delta\delta = \frac{\partial\delta}{\partial U_{kx}}\Delta_x + \frac{\partial\delta}{\partial U_{ky}}\Delta_y = \frac{1}{1+\left(\frac{U_{ky}}{U_{kx}}\right)^2}\left(\frac{\Delta_y}{U_{kx}} - \frac{U_{ky}}{U_{kx}}\cdot\Delta_x\right) =$$

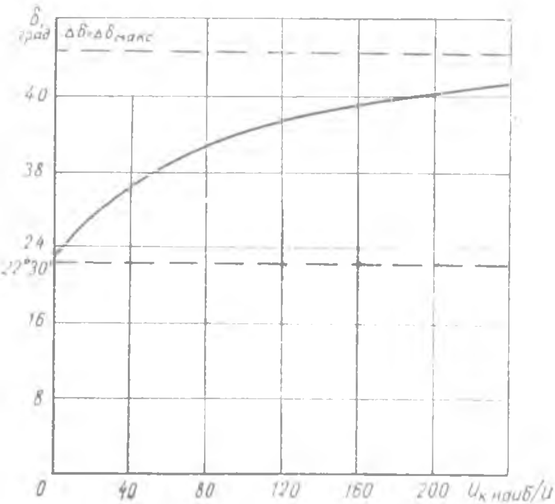

Рис. 4. Значения δ, при которых имеет место максимум погрешности в определении фазы для разных значений $\frac{U_{kx}}{u}$.

$$= \frac{\operatorname{tg}\delta}{1+\operatorname{tg}^2\delta}(\varepsilon_y - \varepsilon_x) = 0{,}5\cdot\sin 2\delta\,(\varepsilon_y - \varepsilon_x). \quad (24)$$

Учитывая (13) и (14), получим

$$\Delta\delta = a\sin 2\delta + \frac{u}{2U_{\text{к наиб}}}(1+\sin 2\delta + \cos 2\delta). \quad (25)$$

Максимум погрешности в определении фазы будет при

$$\operatorname{tg} 2\delta = \frac{2\cdot a\cdot U_{\text{к наиб}}}{u} + 1. \quad (26)$$

Полученное выражение совпадает с формулой (20).

Угол δ, при котором погрешность максимальна, зависит от значения наибольшей из измеренных составляющих. Графически эта зависимость представлена на рис. 4.

Выражение (25) упростим с целью исключения δ. Можно учесть, что $1+\sin 2\delta+\cos 2\delta \leqslant 2{,}414$. Слагаемое $a\sin 2\delta$ сильнее влияет на (25) при больших $\frac{U_{\text{к наиб}}}{u}$, т. е. когда наибольшая погрешность $\Delta\delta_{\text{макс}}$ имеет место при $\delta = 45^\circ$ (рис. 4). Эти рассуждения позволяют получить формулу

$$\Delta\delta_{\text{макс}} = 57{,}3\left(a + 1{,}207\frac{u}{U_{\text{к наиб}}}\right) = 57{,}3\cdot\varepsilon_{\text{макс}}. \quad (27)$$

Вычисления по (27) и (21) приводят к выводу о равнозначности получаемых результатов, особенно если $\frac{U_{\text{к наиб}}}{u} > 50$. Но формула (27) несравненно проще и удобнее для расчетов. Эту формулу рекомендуем применять для практических расчетов наибольших погрешностей в определении фазы измеренного компенсатором вектора.

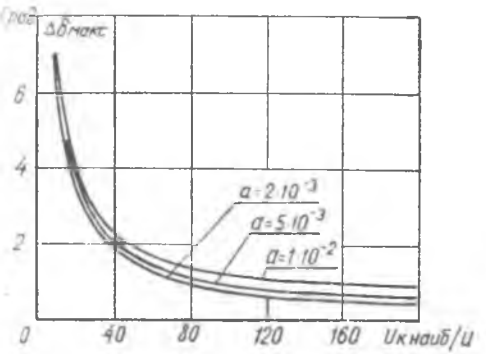

Рис. 5. Зависимость максимума погрешности в определении фазы от относительного значения наибольшей из составляющих.

Формуле (27) соответствуют графики рис. 5.

К сожалению, по нормируемым официальной инструкцией [1] для компенсаторов переменного тока значениям для Δ_x, Δ_y (1 и 2) погрешность компенсатора оценивается не полностью. Согласно инструкции для компенсатора еще дополнительно нормируется отклонение $\Delta\varphi$ сдвига между координатными осями от 90°. Покажем с помощью рис. 6, что наличие $\Delta\varphi$ вызывает погрешность в отсчете составляющей по оси X. Из диаграммы видно, что наличие $\Delta\varphi$ приведет к отсчету $U^1_{кx}$ вместо $U_{кx}$. Погрешность в отсчете составляющей $U_{кx}$ равна

$$\Delta_{\Delta\varphi} = 0{,}0003 \cdot \Delta\varphi \cdot U_{кy}. \qquad (28)$$

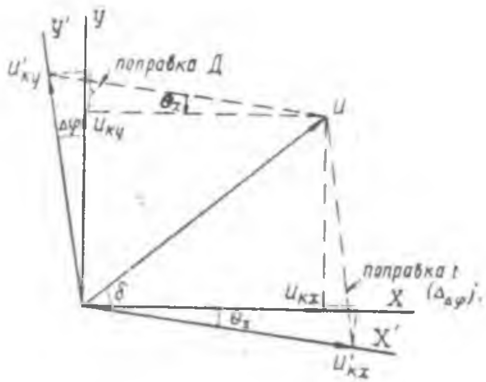

Рис. 6. Влияние углов $\Delta\varphi$ и Θ_x на погрешности в измерении ортогональных составляющих.

Если известны величина и знак $\Delta\varphi$, то можно вводить поправку $B = -0{,}0003 \cdot \Delta\varphi \cdot U_{кy}$. Поправка вводится так

$$U_{кx} = U'_{кx} + B.$$

Обычно известна только допустимая для данного типа компенсатора величина $\pm\Delta\varphi$. Так, например, у компенсатора Р 56 допустимо $\Delta\varphi = \pm 0{,}34°$ (т. е. 20′), следовательно, погрешность в отсчете $U_{кx}$ может достигать значения

$$\Delta_{\Delta\varphi} = \pm 0{,}0003 \cdot 20 \cdot U_{кy}.$$

При $U_{кy} = 1$ *в* погрешность в отсчете $U_{кx}$ (независимо от значения $U_{кx}$) может достигать $\Delta\varphi = \pm 0{,}006$ *в*. С такой величиной нельзя не считаться.

В компенсаторе может иметь место сдвиг Θ_x по фазе между заданным направлением оси X и векторами напряжений, снимаемых с измерительного сопротивления компенсационной цепи X.

На основании рис. 6 следует, что наличие $\Theta_к$ приводит в основном к погрешности в отсчете составляющей по оси y; она может достигать значения

$$\Delta_{\theta_x} = 0{,}0003 \cdot \theta_x \cdot U_{кх}. \qquad (29)$$

Если известны величина и знак θ_x, то может быть введена поправка $Д = 0{,}0003 \cdot \theta_x U_{кх}$.

Поправка вводится так:

$$U_{ку} = U'_{ку} + Д.$$

Угол θ_x и, следовательно, погрешность Δ_{θ_x} не нормируются официальной инструкцией. Угол θ_x целесообразно сводить к минимуму с тем, чтобы погрешностью Δ_{θ_x} можно было бы пренебречь по сравнению с другими составляющими.

Что касается погрешности $\Delta_{\Delta\varphi}$ (28), то ее следует учитывать при оценке погрешности в определении модуля и фазы измеряемого вектора. Это можно сделать введением поправки в формулы (16) и (27). Последние необходимо видоизменить так

$$\varepsilon_{макс} = a + 1{,}207 \frac{u + \Delta_{\Delta\varphi}}{U_{к\ наиб}}. \qquad (30)$$

$$\Delta\delta_{макс} = 57{,}3 \left(a + 1{,}207 \frac{u + \Delta_{\Delta\varphi}}{U_{к\ наиб}} \right). \qquad (31)$$

Формулы (30) и (31) рекомендуется применять для оценки погрешностей в определении модуля и фазы измеряемого вектора при эксплуатации прямоугольно-координатных компенсаторов переменного тока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Инструкция 190—56 по поверке потенциометров переменного тока, ВНИИ комитета стандартов, мер и измерительных приборов при СМ СССР, 1956 г.

2. О. И. Ульянов. К вопросу сравнения компенсаторов переменного тока с индикатором, чувствительным и нечувствительным к фазе тока небаланса. Сборник научных трудов Куйбышевского индустриального института, выпуск VII, 1958.