А. Д. Бойков, А. Н. Дмитриев, Н. Д. Егупов

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В работе приводится метод определения статистических характеристик элементов ОСХ системы со случайными параметрами

В работе [5] были приведены соотношения для определения статистических характеристик выходного сигнала системы со случайными параметрами, при этом предполагалось, что случайная импульсная переходная функция представляется в виде ортогонального ряда.

Для примера рассмотрим случай, когда в качестве ортогонального базиса используются ортогональные экспоненциальные функции.

Пусть

$$\varphi_k(t) = \alpha_0^k + \alpha_1^k e^{-\sigma t} + \alpha_2 e^{-2\sigma t} + \ldots + \alpha_k^k e^{-k\sigma t} = \sum_{l=0}^{k} \alpha_l^k e^{-l\sigma t},$$

$$\int_0^\infty \varphi_i(t)\varphi_j(t)\,dt = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j \end{cases} \tag{1}$$

и, кроме того, на основе общей формулы можно записать зависимость для случайных коэффициентов ортогонального разложения:

$$c_k(t) = \int_0^\infty k(t,\ t-\tau_1)\varphi_k(\tau_1)\,d\tau_1 =$$

$$= \sum_{l=0}^{k} \alpha_l^k \int_0^\infty k(t,\ t-\tau_1)\,e^{-l\sigma\tau_1}\,d\tau_1 = \sum_{l=0}^{k} \alpha_l^k \mu_l(t), \tag{2}$$

где $\mu_l(t) = \int_0^\infty k(t,\ t-\tau_1)\,e^{-l\sigma\tau_1}\,d\tau_1$ — моменты функции $k(t,\ t-\tau)$ (случайные функции времени).

Рассматривая установившийся процесс для принятых выше условий, выражение для корреляционной функции коэффициентов ортогонального разложения можно записать в виде:

$$\overline{c_k(t)\,c_k(t+\tau)} = \sum_{l_1=0}^{k}\sum_{l_2=0}^{k} \alpha_{l_1}^{k}\,\alpha_{l_2}^{k}\,\overline{\mu_{l_1}(t)\,\mu_{l_2}(t+\tau)}. \qquad (3)$$

Из последней формулы видно, что для определения $R_{c_k c_k}(t, \tau)$ необходимо знать корреляционные функции моментов $\mu_l(t)$ и их взаимные корреляционные функции вида $\overline{\mu_i(t)\,\mu_j(t+\tau)}$ $(i \neq j)$. Таким образом, задача сводится к нахождению корреляционных функций моментов и соответствующих взаимно корреляционных функций.

Для решения этой задачи запишем выражение для случайной передаточной функции:

$$W(s, t) = \int_0^\infty k(t,\ t-\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau. \qquad (4)$$

Из этой зависимости легко видеть, что

$$\mu_l(t) = \int_0^\infty k(t,\ t-\tau)\, e^{-l\sigma t}\, d\tau = W(l\sigma,\ t). \qquad (5)$$

Таким образом, случайная функция $\mu_l(t)$ может быть легко получена, если комплексному аргументу s в выражении для передаточной функции придать действительные значения $s = 2\sigma$, где σ — const, $l = 1, 2$, . . Найдем дифференциальное уравнение для определения моментов. Естественно, это должно быть дифференциальное уравнение со случайными коэффициентами.

С указанной выше целью запишем дифференциальное уравнение для определения передаточной функции. Оно имеет вид:

$$A(s,\ t)W(s,\ t) + \frac{dA}{ds}\,\frac{dW(s,\ t)}{dt} + \ldots + \frac{1}{n!}\,\frac{d^n A}{ds^n}\,\frac{d^n W(s,\ t)}{dt^n} = B(s,\ t), \qquad (6)$$

где $$A(s,\ t) = a'_n(t)\, s^n + a'_{n-1}(t)\, s^{n-1} + \ldots + a'_1(t)\, s + a'_0(t), \qquad (7)$$

$$B(s,\ t) = b'_m(t)\, s^m + b'_{m-1}(t)\, s^{m-1} + \ldots + b'_1(t)\, s + b'_0(t). \qquad (8)$$

Придавая комплексному переменному s в равенствах (6), (7) и (8) значения $s = l\sigma$, $l = 1, 2, \ldots$, получим искомое дифференциальное уравнение со случайными коэффициентами. Оно имеет вид:

$$a_n^l(t)\,\frac{d^n \mu_l(t)}{dt^n} + a_{n-1}^l(t)\,\frac{d^{n-1}\mu_l(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0^l(t)\,\mu_l(t) = G_l(t), \qquad (9)$$

где

$$a_n^l(t) = a'_n(t),$$

$$a_{n-1}^l(t) = n a'_n(t)\, l\sigma + a'_{n-1}(t),$$

. . . .

$$a_0^l(t) = a'_n(t)(l\sigma)^n + a'_{n-1}(t)(l\sigma)^{n-1} + \ldots + a'_1(t)(l\sigma) + a'_0(t), \quad (10)$$

$$G_l(t) = b'_m(t)(l\sigma)^m + b'_{m-1}(t)(l\sigma)^{m-1} + \ldots + b'_1(t)(l\sigma) + b'_0(t).$$

Таким образом, мы пришли к дифференциальному уравнению относительно соответствующих моментов импульсной переходной функции.

В этом дифференциальном уравнении со случайными коэффициентами нас интересуют статистические характеристики: математическое ожидание и корреляционная функция моментов $\mu_l(t)$.

При нахождении решения дифференциального уравнения принимаем допущение, что сигнал $\mu(t)$ подчинен нормальному закону распределения.

Здесь необходимо отметить, что дифференциальное уравнение вида (9) уже исследовалось в ряде работ. Например, подробное исследование уравнения (9) проведено в работе [3]. Однако в этой работе выбран очень ограниченный класс воздействий, $G(t) = \bar{g} + \tilde{g}(t)$, т. е. на вход действует постоянный полезный сигнал.

Для рассматриваемого случая такое воздействие при принятых условиях является реальным, т. е. $G(t)$ представляет из себя сумму постоянного и случайного сигналов.

Рассматриваемое уравнение можно представить в виде:

$$a_n^l \frac{d^n \mu_l(t)}{dt^n} + a_{n-1}^l \frac{d^{n-1} \mu_l(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0^l \mu_l(t) =$$

$$= G_l(t) - \alpha_n^l(t) \frac{d^n \mu_l(t)}{dt^n} - \ldots - \alpha_0^l(t) \mu_l(t). \quad (11)$$

С целью упрощения выкладок рассмотрим случай, когда $\alpha_0^l(t)$, ..., $\alpha_n^l(t)$ — стационарные центрированные случайные функции, имеющие Гауссов закон распределения. Пусть, кроме того,

$$G_l(t) = \bar{G}_l + \tilde{G}_l(t).$$

В этом случае, следуя работе [3], можно показать, что спектральную плотность $S_{\mu_l \mu_l}(\omega)$ определяет интегральное уравнение Фредгольма второго рода вида:

$$S_{\mu_l \mu_l}(\omega) = B(\omega) + \lambda \int_0^\infty S_{\mu_l \mu_l}(\sigma) K(\omega, \sigma) d\sigma, \quad (12)$$

где $B(\omega)$ и $K(\omega\sigma)$ — известные функции.

Постоянные составляющие элементов ОСХ определяются уравнением [3].

$$\bar{\mu}_l = \frac{\bar{G}_l - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^\infty K_l(\sigma) R^{(k)}_{G_l \alpha_k^l}(\sigma) d\sigma}{1 - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^\infty K_l(\sigma) R^{(k)}_{\alpha_{0l} \alpha_k^l}(\sigma) d\sigma} \int_0^\infty K_l(\sigma) d\sigma. \quad (13)$$

Перейдем к определению взаимных корреляционных функций между моментами.

Имеем:

$$\mu_{l_1}(t)=\int_0^\infty K_{l_1}(\sigma_1)\,\varepsilon_{l_1}(t-\sigma_1)\,d\sigma_1,$$

$$\mu_{l_2}(t+\tau)=\int_0^\infty K_{l_2}(\sigma_2)\,\varepsilon_{l_2}(t+\tau-\sigma_2)\,d\sigma_2,$$

где

$$\varepsilon_{l_1}(t)=G_{l_1}(t)-\sum_{i_1=0}^{n}\alpha_{i_1}^{l_1}(t)\frac{d^{i_1}\mu_{l_1}(t)}{dt^{i_1}},$$

$$\varepsilon_{l_2}(t)=G_{l_2}(t)-\sum_{i_2=0}^{n}\alpha_{i_2}^{l_2}(t)\frac{d^{i_2}\mu_{l_2}(t)}{dt^{i_2}}.$$

Откуда

$$\overline{\mu_{l_1}(t)\,\mu_{l_2}(t)}=\int_0^\infty\int_0^\infty K_{l_1}(\sigma_1)\,K_{l_2}(\sigma_2)\,\overline{\varepsilon_{l_1}(t-\sigma_1)\,\varepsilon_{l_2}(t+\tau-\sigma_2)}\,d\sigma_1\,d\sigma_2. \quad (14)$$

Последнее равенство показывает, что задача сводится к определению взаимной корреляционной функции вида

$$R_{\varepsilon_{l_1}\varepsilon_{l_2}}(\tau)=\overline{\varepsilon_{l_1}(t)\,\varepsilon_{l_2}(t+\tau)}. \quad (15)$$

Используя формулу для сигналов $\varepsilon_{l_1}(t)$ и $\varepsilon_{l_2}(t)$ можно легко найти нужную нам зависимость. Она имеет вид:

$$R_{\varepsilon_{l_1}\varepsilon_{l_2}}(\tau)=R_{G_{l_1}G_{l_2}}(\tau)-\bar{\mu}_{l_2}R_{G_{l_1}\alpha_0^{l_2}}(\tau)-\bar{\mu}_{l_2}R_{G_{l_2}\alpha_0^{l_1}}(\tau)+$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\left[(-1)^j R_{\alpha_i^{l_1}\alpha_j^{l_2}}(\tau)\,R^{(i+j)}_{\mu_{l_1}\mu_{l_2}}+R^{(i)}_{\alpha_j^{l_2}\mu_{l_1}}(\tau)\,R^{(j)}_{\alpha_i^{l_1}\mu_{l_2}}(\tau)\right]. \quad (16)$$

Находя $R_{\alpha_j^{l_2}\mu_{l_1}}(\tau)$ и $R_{\alpha_i^{l_1}\mu_{l_2}}(\tau)$ и применяя преобразование Фурье к уравнению, получим интегральное уравнение Фредгольма II рода, которое определяет $S_{\mu_{l_1}\mu_{l_2}}(\omega)$.

Уравнение имеет вид:

$$S_{\mu_{l_1}\mu_{l_2}}(\omega)=B_1(\omega)+\lambda_1\int_0^\infty S_{\mu_{l_1}\mu_{l_2}}(\sigma)\,K_1(\omega,\sigma)\,d\sigma. \quad (17)$$

Методы решения таких уравнений известны. На основе сказанного выше можно записать:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}R_{c_k''c_k''}(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{l_1=0}^{k}\sum_{l_2=0}^{k}\alpha_{l_1}^{k}\alpha_{l_2}^{k}R_{\mu_{l_1}\mu_{l_2}}(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,dr. \quad (18)$$

откуда получаем:

$$S_{c''_k c''_k}(\omega) = \sum_{l_1=0}^{k} \sum_{l_2=0}^{k} S_{\mu_{l_1} \mu_{l_2}}(\omega)\, \alpha^k_{l_1} \alpha^k_{l_2}. \tag{19}$$

Математическое ожидание (постоянная составляющая) ОСХ находится по формуле:

$$C'_k = \sum_{l=0}^{k} \alpha^k_l \overline{\mu}_l. \tag{20}$$

Выше был рассмотрен случай, когда $\alpha^l_i(t)$ и $\beta^l_i(t)$ — стационарные случайные функции. Как легко видеть, используя результаты, изложенные в [4], можно получить решение для средних значений и корреляционных функций в замкнутой форме и таким образом избежать решения интегральных уравнений Фредгольма II рода.

Для определения автокорреляционной функции выходного сигнала и сигнала ошибки необходимо знать корреляционные функции вида $R_{c''_i y}(\tau)$ [5]. Для их определения запишем равенства:

$$\overline{c''_k(t)\, y(t+\tau)} = R_{c''_k y}(\tau) =$$

$$= \sum_{l=0}^{k} \alpha^k_l \overline{\mu_l(t)\, y(t+\tau)} = \sum_{l=0}^{k} \alpha^k_l R_{\mu_l y}(\tau), \tag{21}$$

где

$$\mu_l(t) = \int\limits_0^\infty K_l(\sigma) \left[G_l(t-\sigma) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_{lk}(t-\sigma) \frac{d^k \mu_l(t-\sigma)}{dt^k} \right] d\sigma.$$

Откуда

$$\overline{\mu_l(t)\, y(t+\tau)} = R_{\mu_l y}(\tau) = \int\limits_0^\infty K_l(\sigma) [R_{yG_l}(\tau+\delta) -$$

$$- \overline{\mu}_l R_{y\alpha_{l_0}}(\tau+\sigma)]\, d\sigma. \tag{22}$$

Таким образом, имеем:

$$R_{c''_y}(\tau) = \sum_{l=0}^{k} \alpha^k_l R_{\mu_l y}(\tau) =$$

$$= \sum_{l=0}^{k} \alpha^k_l \int\limits_0^\infty K_l(\sigma) [R_{yG_l}(\tau+\sigma) - \overline{\mu}_l R_{y\alpha_{l_0}}(\tau+\sigma)]\, d\sigma. \tag{23}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложено ввести случайную динамическую характеристику — обобщенную спектральную характеристику, через которую достаточно просто выражаются статистические характеристики выходного сигнала и сигнала ошибки системы со случайными параметрами. Методика имеет силу как в случае стационарных, так и нестационарных входных воздействий и параметрических возмущений.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Солодовников, А. Н. Дмитриев, Н. Д. Егупов. Ортогональный метод анализа и синтеза линейных систем автоматического управления на основе понятия моментов. Сб. «Автоматическое управление и вычислительная техника», вып. 8, «Машиностроение», 1968.

2. В. В. Солодовников, А. Н. Дмитриев, Н. Д. Егупов. Анализ и синтез систем автоматического управления методом ортогональных спектров, Трудове на II Национальна конференция по автоматика, Варна, сентябрь, 1967.

3. Е. А. Федосов, Г. Г. Себряков. Спектральный анализ систем управления со случайно изменяющимися параметрами. Сб. «Автоматическое управление и вычислительная техника» под ред. В. В. Солодовникова, вып. 8. «Машиностроение», 1968.

4. П. С. Матвеев, А. С. Синицын, Ю. М. Глебачев, А. Д. Евдокимов. Оптимизация систем автоматического управления с учетом нелинейностей, случайных параметров и помех. Сб. «Автоматическое управление и вычислительная техника» под ред. В. В. Солодовникова, вып. 8. «Машиностроение», 1968.

5. А. Д. Бойков, А. Н. Дмитриев, Н. Д. Егупов. Метод определения статистических характеристик выходного сигнала линейной системы со случайными параметрами на основе ее обобщенной спектральной характеристики. Труды КуАИ, вып. 39, Куйбышев, 1969.