сфероидальных системах координат, из решения которых определяются напряженности поля и выходные характеристики различных электромагнитных преобразователей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арфкен Г. Математические методы в физике. М., «Атомиздат», 1970.
2. Морс Г. П., Фешбах Х. Методы теоретической физики. М., ИИЛ, 1960.

И. Г. АБЛАМУНЕЦ, В. Е. ШАТЕРНИКОВ

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ВИТКА НАД ВРАЩАЮЩИМСЯ ПРОВОДЯЩИМ ШАРОМ

Вихретоковые преобразователи (ВТП) широко применяются для контроля параметров движущихся тел в условиях динамических испытаний. Для правильного выбора конструктивных размеров ВТП необходимо знать поле, создаваемое первичным преобразователем, с учетом движения контролируемого изделия.

Рассмотрим расчет электромагнитного поля витка с переменным током над вращающимся проводящим шаром. Такая задача возникает при контроле перемещений или скорости вращения сферического ротора гироскопа [1].

В этом случае в области шара справедливы уравнения Максвела для движущихся сред [2]:

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{rot}\vec{H} = \sigma_1(\vec{E} + [\vec{V}\times\vec{B}]) \\ &\operatorname{rot}\vec{E} = -i\omega\,\mu_1\vec{H} \\ &\operatorname{div}\vec{H} = 0 \\ &\vec{V} = \vec{1}_\varphi V_\varphi = [\vec{\Omega}\times\vec{r}] \end{aligned}\right. \qquad (1)$$

а вне шара:

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{rot}\vec{H} = i\omega\varepsilon\vec{E} + \vec{j} \\ &\operatorname{rot}\vec{E} = -i\omega\,\mu_0\vec{H} \\ &\operatorname{div}\vec{H} = 0 \\ &\vec{j} = 1_\varphi\cdot j_\varphi = \vec{1}_\varphi I\delta(r-a)\cdot\delta(\Theta-\Theta_0), \end{aligned}\right. \qquad (2)$$

где j — плотность тока витка; V_φ — линейная скорость вращения точки шара с координатами r и Θ; $\delta(r-a)$ и $\delta(\Theta-\Theta_0)$ — функции Дирака; μ_1, σ_1 — магнитная проницаемость и электропроводность материала шара; μ_0, ε — магнитная и диэлектрическая проницаемости среды вне шара; a, Θ_0, J — сферические координаты и ток витка; Ω — угловая скорость вращения шара (совпадает по направлению с осью витка); ω — угловая частота переменного тока витка; r и Θ — текущие координаты.

Вводя, как обычно, векторный потенциал $\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A}$, можно свести системы (1) и (2) к уравнениям:

$$\nabla^2 \vec{A} + k_1^2 \vec{A} + \sigma_1 [\mathrm{rot}\,\vec{A} \times [\vec{r} \times \vec{\Omega}]] = 0; \tag{3}$$

$$\nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\vec{J}, \tag{4}$$

где

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu_0,$$

$$k_1^2 = -i\omega\mu_1\sigma_1.$$

Учитывая, что в силу симметрии векторный потенциал не будет зависеть от координаты φ, эти уравнения преобразуются:

$$\left\{\begin{aligned} &\nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2}\left[A_r + \frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}(\sin\Theta A_\Theta)\right] + k_1^2 A_r = -j_r && (5)\\ &\nabla^2 A_\Theta + \frac{2}{r^2}\left[\frac{\partial A_r}{\partial\Theta} - \frac{A_\Theta}{2\sin^2\Theta}\right] + k_1^2 A_\Theta = -j_\Theta && (6)\\ &\nabla^2 A_\varphi - \frac{1}{r^2\sin^2\Theta} A_\varphi + k_1^2 A_\varphi = 0 && (7)\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2}\left[A_r + \left[\frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}(\sin\Theta A_\Theta)\right]\right] + k^2 A_r = 0 && (8)\\ &\nabla^2 A_\Theta + \frac{2}{r^2}\left[\frac{\partial A_r}{\partial\Theta} - \frac{A_\Theta}{2\sin^2\Theta}\right] + k^2 A_\Theta = 0 && (9)\\ &\nabla^2 A_\varphi - \frac{1}{r^2\sin^2\Theta} A_\varphi + k^2 A_\varphi = -j_\varphi, && (10)\end{aligned}\right.$$

где

$$\left\{\begin{aligned} j_r &= \Omega\sigma_1 \sin\Theta \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\\ j_\Theta &= \Omega\sigma_1 \frac{\partial}{\partial\Theta}(\sin\Theta A_\varphi).\end{aligned}\right. \tag{11}$$

Из (11) видно, что правые части (5) и (6) имеют размерность плотности тока и линейно зависят от скорости вращения шара. При $\Omega = 0$ они равны нулю. Это значит, что исчезают составляющие поля A_Θ и A_r (отсутствуют источники поля). Поэтому j_r и j_Θ можно рассматривать как сторонние токи.

В равенства (7) и (10) входит только составляющая A_φ векторного потенциала, что дает возможность рассматривать отдельно внешнее и внутреннее возбуждение шара.

Внешнее возбуждение

Электромагнитное поле сторонних токов, согласно [3], можно представить в виде волн, распространяющихся в радиальном направлении. При этом для поля в точках пространства, где отсутствуют источники, справедливы следующие выражения:

$$\left| \begin{aligned} H_r &= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) U_{rn} \\ H_\Theta &= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^2 (r U_{rn})}{\partial \Theta\, \partial r} \\ H_\varphi &= \frac{i\omega\mu_0}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial (r U_{rn})}{\partial \Theta}, \end{aligned} \right. \tag{12}$$

где

$$U_{rn} = P_n(\cos\Theta) \begin{cases} \xi_n^{(2)}(kr) F_n^{(2)}, & r > a \\ \psi_n(kr) F_n^{(1)}, & r < a \end{cases} \tag{13}$$

$$F_n^{(s)} = \frac{2n+1}{n(n+1)} \cdot \frac{ik}{2} \int_0^\infty \int_0^\pi j_\varphi R_n^{(s)}(kr') \frac{\partial P_n(\cos\Theta')}{\partial\Theta} r'^2 \sin\Theta'\, d\Theta'\, dr'. \tag{14}$$

В формулах (13) и (11)

при $s = 1$ $\qquad R_n^1(kr') = \xi_n^{(2)}(kr') = \sqrt{\frac{\pi}{2kr'}}\, H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}(kr')}$,

при $s = 2$

$$R_n^{(2)}(kr') = \psi_n(kr') = \sqrt{\frac{\pi}{2kr'}}\, T_{n+\frac{1}{2}(kr')}.$$

$H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}$ — функции Ганкеля второго рода полуцелых порядков;

$T_{n+\frac{1}{2}}$ — функции Бесселя полуцелых порядков;

$P_n(\cos)\Theta$ — присоединенные функции Лежандра первого рода.

Подставляя в (11) плотность тока из (2), получим

$$F_n^{(s)} = I \frac{2n+1}{n(n+1)} \cdot \frac{ika^2}{2} R_n^{(s)}(ka) \frac{\partial P_n(\cos\Theta_0}{\partial\Theta_0} \sin\Theta_0. \tag{15}$$

Поле, отраженное от шара, будет выражаться формулами (12), где

$$U_{rn}^0 = C_n^0 P_n(\cos\Theta) \cdot \xi_n^{(2)}(kr) F_n^{(1)}. \tag{16}$$

Сумма выражений (13) и (16) определяет поле вне шара.

Поле, возбуждаемое в шаре, будет также выражаться формулами (12), только со своими постоянными μ_1, σ_1, k_1;

$$U_{rn}^{\text{п}} = C_n^{\text{п}} P_n(\cos\Theta) \psi_n(k_1 r) F_n^{(1)}. \tag{17}$$

При этом (14) остается без изменений.

Граничные условия для движущихся сред заключаются в непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей [4] и могут быть записаны так:

$$\begin{cases} \left[\dfrac{\partial}{\partial r}(rU_{rn}) + \dfrac{\partial}{\partial r}(rU^{0}_{rn}) - \dfrac{\partial}{\partial r}(rU^{\text{п}}_{rn})\right]_{r=R} = 0 \\ \left[\mu_0(rU_{rn}) + \mu_0(rU^{0}_{rn}) - \mu_1(rU^{\text{п}}_{rn})\right]_{r=R} = 0 \end{cases} \tag{18}$$

Подставляя (13), (16), (17) в (18), получим выражение для коэффициентов отражения и преломления:

$$C^{0}_{n} = \frac{\frac{\mu_1}{\mu_0}\psi_n(k_1R)\frac{\partial}{\partial r}[R\psi_n(kR)] - \psi_n(kR)\frac{\partial}{\partial r}[R\psi_n(k_1R)]}{\xi^{(2)}_{n}(kR)\frac{\partial}{\partial R}[R\psi_n(k_1R)] - \frac{\mu_1}{\mu_0}\psi_n(k_1R)\frac{\partial}{\partial R}[R\xi^{(2)}_{n}(kR)}\,;$$

$$C^{\text{п}}_{n} = \frac{i\frac{1}{kR}}{\xi^{(2)}_{n}(kR)\frac{\partial}{\partial R}[R\psi_n(k_1R)] - \frac{\mu_1}{\mu_0}\psi_n(k_1R)\frac{\partial}{\partial R}[R\xi^{(2)}_{n}(kR)]}\,.$$

Внутреннее возбуждение

Для определения токов j_r и j_Θ надо воспользоваться известным соотношением

$$\vec{E} = -i\omega\mu\vec{A} - \operatorname{grad}\varphi.$$

Учитывая симметрию задачи, это соотношение можно переписать как

$$\vec{E} = -i\omega\mu\vec{A}$$

или

$$A_\varphi = \frac{i}{\omega\mu_1}E_\varphi = -\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial\left(rU^{\text{п}}_{r\text{п}}\right)}{\partial\Theta}. \tag{19}$$

Подставляя (19) в (11), определим токи в шаре.

Пользуясь еще раз результатами [3], находим поле вне шара:

$$\begin{cases} E_r = \dfrac{1}{r}\sum\limits_{n=0}^{\infty} n(n+1)\Phi_{rn} \\ E_\Theta = \dfrac{1}{r}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\partial^2(r\Phi_{rn})}{\partial\Theta\,\partial r} \\ H_\varphi = -i\,\dfrac{\omega\varepsilon}{r}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\partial(r\Phi_{rn})}{\partial\Theta}, \end{cases} \tag{20}$$

где

$$\Phi_{rn} = P_n(\cos\Theta)\,\xi_n^{(2)}(kr)\,\gamma_n^{(2)}, \quad r > R \tag{21}$$

и

$$\gamma_n^{(2)} = \frac{2n+1}{n(n+1)} \cdot \frac{k}{2\omega\varepsilon} \int\limits_0^R \int\limits_0^\pi \left\{ j_r \frac{n(n+1)}{r'} R_n^{(2)}(kr') P_n(\cos\Theta') + \right.$$

$$\left. + j_\Theta \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} [r' R_n^{(2)}(kr')] \frac{\partial P_n(\cos\Theta')}{\partial\Theta'} \right\} r'^2 \sin\Theta' \, d\Theta' \, dr'. \tag{22}$$

Теперь нетрудно написать выражение для составляющих электромагнитного поля вне шара:

$$\begin{cases} H_r = \dfrac{1}{r} \sum\limits_{n=0}^{\infty} n(n+1)(U_{rn} + U_{rn}^0) \\ H_0 = \dfrac{1}{r} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\partial}{\partial\Theta\,\partial r} [r(U_{rn} + U_{rn}^0)] \\ E_\varphi = i\,\dfrac{\omega\mu_0}{r} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\partial}{\partial\Theta} [r(U_{rn} + U_{rn}^0)] \\ E_r = \dfrac{1}{r} \sum\limits_{n=0}^{\infty} n(n+1)\Phi_{rn} \\ E_\Theta = \dfrac{1}{r} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\partial^2 (r\Phi_{rn})}{\partial\Theta\,\partial r} \\ H_\varphi = -i\,\dfrac{\omega\varepsilon}{r} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\partial (r\Phi_{rn})}{\partial\Theta}. \end{cases} \tag{23}$$

Отметим, что при $\Omega = 0$ три последние составляющие, зависящие от скорости вращения, обратятся в нуль и получим выражения для стационарного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горенштейн И. А., Шульман И. А. Инерциальные навигационные системы. М., 1970.

2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., ГИТЛ, 1957.

3. Марков Г. Т., Чаплин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М. — Л., 1967.

4. Зоммерфельд А. Электродинамика. М., 1958.