В. А. ДЕНИСОВ, Ю. И. СТЕБЛЕВ,
В. И. ШАТЕРНИКОВ

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ПРОВОДНИКОВОГО ВИХРЕТОКОВОГО ДАТЧИКА

При экспериментальных и теоретических исследованиях вихретоковых проводниковых датчиков применительно к практическим задачам контроля необходимо знать зависимость его параметров — комплексного сопротивления Z, индуктивности L_1 и вносимого активного сопротивления R_1 от измеряемых величин и мешающих факторов.

В данной работе определяются параметры вихретокового проводникового датчика без ферритового сердечника, находящегося над проводящей полуплоскостью или над ограниченной с двух сторон проводящей поверхностью. Расположение датчика над контролируемой поверхностью, система координат и все обозначения приняты те же, что и при расчете его поля [1].

Для вывода перечисленных выше зависимостей воспользуемся известным положением о том, что ток I, протекающий через нить, должен скомпенсировать не только падение напряжения от собственного полного сопротивления нити Z_0, но и падение напряжения от полного сопротивления проводящей поверхности Z_i, приведенное к первичной стороне. Падение напряжения на отрезке провода длиной l может быть выражено через напряженность поля E_{10} на поверхности провода:

$$\dot{I}\cdot\dot{Z}_1 = (R_1 + j\omega L_1)\dot{I} = \dot{E}_{10}\cdot l. \qquad (1)$$

Определим $\dot{E}_{10}$, воспользовавшись формулой

$$\dot{E}_{10} = -j\omega A_{10}, \qquad (2)$$

где A_{10} — вектор-потенциал внешнего поля в точке с координатами $v=v_0$; $u=0$.

Используя [1, 2], где дается выражение для A_1, получим

$$Z_1 = \frac{\dot{E}_{10}\cdot l}{I} = -j\,\omega\mu_1 \frac{l}{2\pi}\left[\ln\sqrt{\frac{(v_0+v)^2+u^2}{(v_0-v)^2+u^2}} - 2\int_0^\infty \frac{-e^{-2v_0\lambda}}{\lambda+\sqrt{\lambda^2+jk^2}}\,d\lambda\right] \quad (3)$$

1-й член для координат $v=v_0$; $u=0$ является физической неопределенностью, и, чтобы от нее избавиться, вводится радиус провода r_0, после чего это слагаемое примет вид

$$\lim_{\substack{v\to-(v_0+r_0)\\ u\to 0}} \ln\sqrt{\frac{(v_0+v)^2+u^2}{(v_0-v)^2+u^2}} = \ln\frac{R_0}{2v_0} \quad \text{при } v_0 \gg r_0, \quad (4)$$

где $R_0 = \operatorname{sh}\frac{\pi r_0}{2x_0}$.

Для нахождения 2-го слагаемого в выражении (3) требуется вычислить интеграл

$$L = \int_0^\infty \frac{e^{-2v_0\lambda}}{\lambda+\sqrt{\lambda^2+jk^2}}\,d\lambda. \quad (5)$$

Согласно [3] он выражается в конечном виде через функции Струве — H_ν и Неймана N_ν комплексного аргумента:

$$L = \frac{\pi}{2\sqrt{2}\,k_1 v_0(1+j)}\{H_1[\sqrt{2}v_0k_1(1+j)] - N_1[\sqrt{2}v_0k_1(1+j)]\} - \frac{1}{j4v_0^2k_1^2} \quad (6)$$

Однако применять для каких-либо расчетов выражение (6) не представляется возможным, поэтому преобразуем его с помощью асимптотического представления функции Струве [3].

$$H_\nu(\xi) = N_\nu(\xi) + \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{p-1}\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\xi}{2}\right)^{-2m+\nu-1}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}-m\right)^2} + O(|\xi|^{\nu-2p-1}). \quad (7)$$

Эта формула применяется для больших значений $|\xi| = 2v_0k_1$ и не пригодна при достаточно малых $|\xi|$.

Если задаться относительной погрешностью (1%), то $|\xi|$ должно быть больше 5. В этом случае берется один или два члена ряда (7) и окончательное выражение для Z_1 записывается в виде:

$$\dot{z} = -\frac{\mu_0\omega\, l}{\pi}\left[\frac{1}{2k_1^2v_0^2} - \frac{1}{\sqrt{2}\,k_1\cdot v_0} + j\left(\ln\frac{R_0}{2v_0} - \frac{1}{\sqrt{2}\,k_1 v_0}\right)\right]. \quad (8)$$

Определим L другим способом, выделив в (8) действительную и мнимую части подынтегрального выражения и проделав необходимые операции, получим

$$\int_0^\infty \frac{l^{-2v_0\lambda}}{\lambda+\sqrt{k^2+{}_1^2}}\,d\lambda\, L = j\left(\frac{1}{4v_0^2k_1^2} - \frac{1}{\sqrt{2}\,k_1^2}\int_0^\infty \sqrt{\sqrt{\lambda^4+k_1^4}+\lambda^2}\, l^{-2v_0\lambda}\,d\lambda + \right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}\,k_1^2}\int_0^\infty \sqrt{\sqrt{\lambda^4+k_1^4}-\lambda^2}\,l^{-2v_0\lambda}\,d\lambda). \qquad (9)$$

Несобственные интегралы

$$c=\frac{1}{\sqrt{2}\,k_1^2}\int_0^\infty \sqrt{\sqrt{\lambda^4+k^4}-\lambda^2}\,l^{-2v_0\lambda}\,d\lambda, \qquad (10)$$

$$d=\frac{1}{\sqrt{2}\,k_1^2}\int_0^\infty \sqrt{\sqrt{\lambda^4+k^4}+\lambda^2}\,l^{-2v_0\lambda}\,d\lambda \qquad (11)$$

могут быть вычислены на ЭВМ. Запишем короче

$$L=c+j\left(\frac{1}{4v_0^2\,k_1^2}-d\right). \qquad (12)$$

Рассмотрим некоторые особенности поведения интегралов c и d, необходимые для оценки остаточного члена при приближенном интегрировании и зависимость L от параметра k_1.

1. При $k_1=0$ выкладки (10) $\div$ (11) теряют смысл, но сам интеграл L упрощается:

$$\int_0^\infty \frac{l^{-2v_0\lambda}}{2\lambda}\,d\lambda=\ln\sqrt{2v_0}. \qquad (13)$$

2. Оценка погрешности при приближенном вычислении несобственных интегралов c и d. Если ввести новую переменную $\xi=v_0\lambda$, то интеграл c переходит в другую форму

$$c=\frac{1}{\sqrt{2}\,m}\int_0^\infty \sqrt{\sqrt{\left(\frac{\xi}{m}\right)^4+1}-\left(\frac{\xi}{m}\right)^2}\,l^{-2\xi}\,d\xi, \qquad (14)$$

где $m=v_0k_1$.

Очевидно, что этот интеграл — функция только m. Рассмотрим остаточный член при интегрировании:

$$\Delta=\frac{1}{\sqrt{2}m}\int_q^\infty \sqrt{\sqrt{\left(\frac{\xi}{m}\right)^4+1}-\left(\frac{\xi}{m}\right)^2}\,l^{-2\xi}\,d\xi\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}\,m}\int_q^\infty l^{-2\xi}\,d\xi=\frac{1}{2\sqrt{2}\,m}\,l^{-2q}, \qquad (15)$$

$$q>\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2\sqrt{2}\,m\Delta}. \qquad (16)$$

Аналогичная оценка может быть выполнена и для интеграла d,

$$\Delta=\frac{1}{\sqrt{2}\,m}\int_0^\infty \sqrt{\sqrt{\left(\frac{\xi}{m}\right)^4+1}+\left(\frac{\xi}{m}\right)^4}\,l^{-2\xi}\,d\xi\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{m^2}\int\limits_0^\infty \xi e^{-2\xi}\, d\xi = \frac{1}{4m^2}(2q+1)\, e^{-2q}, \tag{17}$$

$$\text{где } 4m^2\Delta < (2q+1)\, e^{-2q}. \tag{18}$$

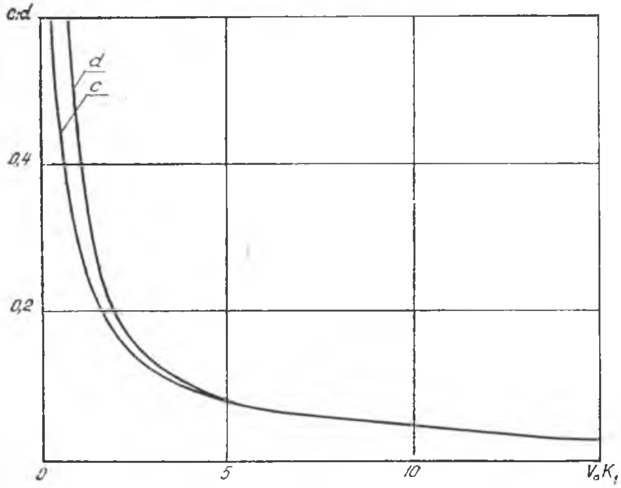

Рис. 1. Интегралы *c* и *d*

Эти результаты используются для оценки погрешности при вычислении интегралов *c* и *d*.

Расчет интегралов *c* и *d* был произведен на ЭВМ «Проминь-М». Результаты расчета приведены на рис. 1.

При значениях $v_0k_1>2$ интегралы *c* и *d* равны. В этом случае искомый интеграл равен

$$L = \frac{1}{2v_0k_1} + j\,\frac{1-2v_0k_1}{4v_0^2k_1^2}. \tag{19}$$

Аппроксимируя интегралы *c* и *d* (рис. 1), для $v_0k_1>1{,}5$ и $v_0k_1<1{,}5$, получим:

$$\dot{z}_1 = -\frac{\mu_0\,\omega l}{\pi}\cdot\left[\frac{1}{2k_1^2v_0^2} - \frac{1}{\sqrt{2}\,k_1v_0} + j\left(\ln\frac{R_0}{2v_0} - \frac{1}{\sqrt{2}\,k_1v_0}\right)\right] \tag{20}$$

для $v_0k_1>1{,}5$.

$$\dot{z}_1 = -\frac{\mu_0\cdot\omega\cdot l}{2\pi}\left[\frac{1}{2v_0^2k_1^2} - \frac{2}{1{,}9v_0k_1} + j\left(\ln\frac{R_0}{2v_0} - \frac{1}{1{,}4v_0k_1}\right)\right] \tag{21}$$

для $\kappa_1v_0<1{,}5$.

После перехода к системе координат X—$У$ окончательно получим

$$R_1 = \frac{\omega\mu_0\cdot l}{2\sqrt{2}\cdot x_0k\,\mathrm{sh}\,\dfrac{\pi y_0}{2x_0}}\left(1 - \frac{\pi}{2\sqrt{2}\,x_0\,k\,\mathrm{sh}\,\dfrac{\pi y_0}{2x_0}}\right), \tag{22}$$

$$X_1 = \frac{\omega \cdot \mu_0 l}{\pi} \left(-\ln \frac{R_0}{2 \operatorname{sh} \frac{\pi y_0}{2x_0}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}\, k\, x_0 \operatorname{sh} \frac{\pi y_0}{2x_0}} \right) \tag{23}$$

для $v_0 k_1 > 1{,}5$.

$$R_1 = \frac{\omega \mu_0 l}{2x_0 k \cdot \operatorname{sh} \cdot \frac{\pi y_0}{2x_0}} \left(0{,}526 - \frac{\pi}{8kx_0 \operatorname{sh} \cdot \frac{\pi y_0}{2x_0}} \right), \tag{24}$$

$$X_1 = \frac{\omega \mu_0 l}{2\pi} \left(-\ln \frac{R_0}{2v_0} + \frac{\pi}{2{,}8kx_0 \cdot \operatorname{sh} \frac{\pi y_0}{2x_0}} \right) \tag{25}$$

для $v_0 k_1 < 1{,}5$.

Таким образом, получены приближенные выражения для расчета параметров проводниковых вихретоковых датчиков. Более точные результаты можно получить, произведя графо-аналитический расчет.

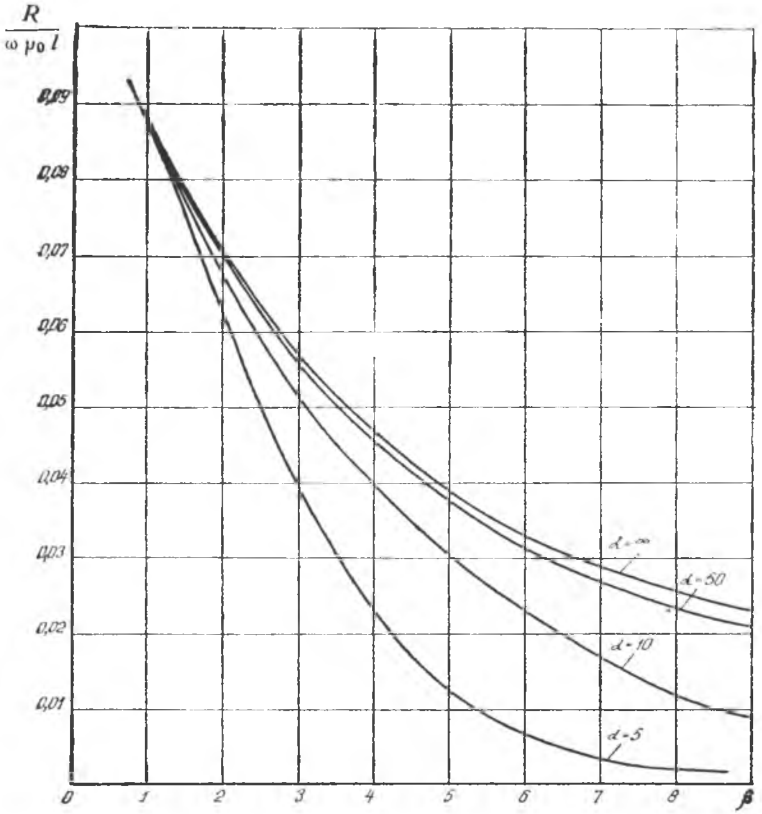

Рис. 2. Зависимость вносимого активного сопротивления от $\beta = \kappa y_0$ для различных значений $\alpha = 2x_0 k$

Для случая полупространства, т. е. $2x_0 >> y_0$ будем иметь следующие выражения:

$$R_1 = \frac{\omega\mu_0 \cdot l}{\pi \sqrt{2} k y_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}\ k y_0}\right), \tag{26}$$

$$X_1 = \frac{\omega\mu_0 l}{\pi} \left(-\ln \frac{R_0}{2v_0} + \frac{1}{\sqrt{2} k y_0}\right) \tag{27}$$

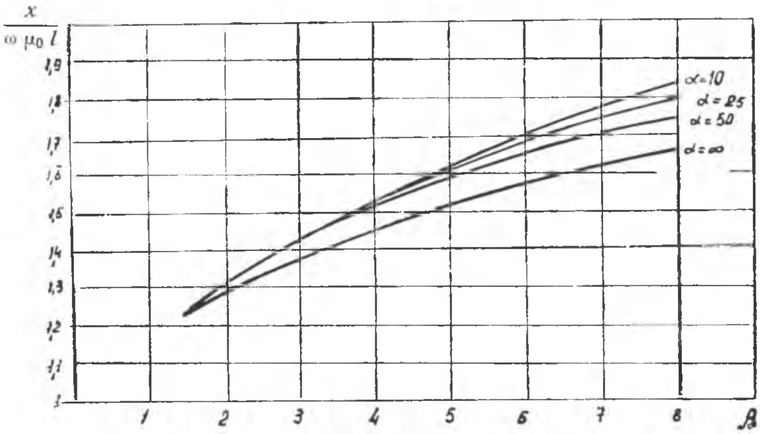

Рис. 3. Зависимость вносимого реактивного сопротивления от $\beta = k y_0$ для различных значений α

По формулам (22—27) построены графики, которые приведены на рис. 2, 3.

Пользуясь выражениями (22÷25), можно определить погрешность измерения датчика в зависимости от толщины пластины.

Пример. При $k=0{,}025$, $y_0=150$ *мкм*, а $x_0=1500$ *мкм*, получим $\frac{R_1}{\omega\mu_0} = 0{,}048$. Допустим, что пластина по ширине имеет допуск $\pm 10\%$, тогда $\frac{R_1}{\omega\mu_0 \Delta} = 0{,}0466$, т. е. погрешность $\delta\% = \frac{\Delta R_1}{R_1} \cdot 100\% = 2{,}92\%$.

Эту погрешность можно определить и графически при разных k, т. е. для различных материалов. Полученные теоретические кривые подтверждены экспериментально.

Из графиков (рис. 2, 3), видно, что при $\frac{y_0}{2x_0} < 0{,}2$ для приведенных k пластину можно рассматривать как бесконечную по оси x.

Таким образом, теоретические и экспериментальные исследования показывают, что при $\frac{y_0}{2x_0} < 0{,}2$ ширина пластины практически не влияет на результаты вычислений, и действие ее на вносимые параметры датчика можно рассматривать как действие проводящего полупространства, при этом погрешность не превышает 10%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Автоматические измерительные и регулирующие устройства, вып. VI, г. Куйбышев, 1970.

2. М. Штафль. Электродинамические задачи в электрических машинах, г. Москва, 1966.

3. И. Е. Градштейн и И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва, ФМ, 1963.