

В. Д. Кузенков

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ ОГИБАЮЩЕЙ И ФАЗЫ СУММЫ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

В некоторых случаях, связанных с измерением параметров случайных процессов или с исследованием прохождения сигналов через электрические цепи, имеет место суммирование гармонических колебаний со случайными начальными фазами. В качестве примера можно указать на процесс, образующийся путем линейного суммирования независимых потоков радиочастотных импульсов (рис. 1). Здесь огибающая процесса во время наложения импульсов будет случайной величиной; распределение вероятности

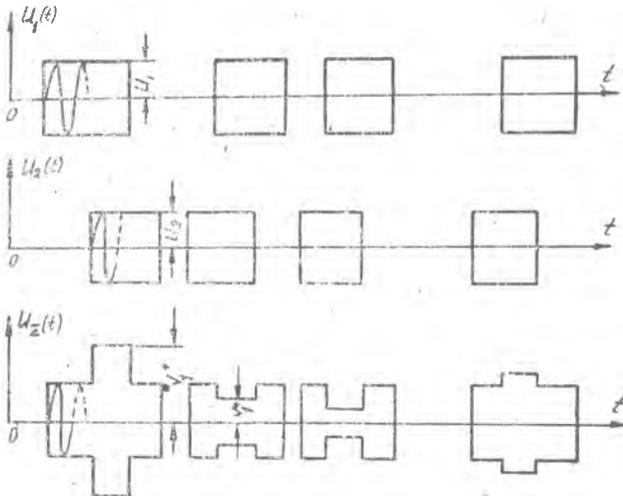


Рис. 1.

фазы в этих интервалах отлично от распределения фазы исходных компонент.

Найдем распределения вероятности огибающей фазы в случае суммирования двух и трех гармонических колебаний со случайными, равномерно распределенными на интервале $(-\pi, \pi)$, начальными фазами*.

Начнем рассмотрение с суммы двух колебаний вида

$$u_i(t) = U_i \cos(\omega t + \varphi_i^*), \quad (1)$$

где U_i — произвольная, но детерминированная амплитуда;

φ_i^* — случайная фаза, причем плотность вероятности фазы $w(\varphi)$ равна:

$$w(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, \quad |\varphi| \leq \pi, \quad (2)$$

Здесь и ниже звездочкой отмечены случайные величины; в обозначении их реализаций (заданных значений) звездочка опущена. Очевидно, что модуль огибающей суммы V_1 равен (рис. 2а):

$$V_1 = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2 \cos \Phi_1^*}, \quad (3)$$

$$\Phi_1^* = \varphi_1^* - \varphi_2^*,$$

где Φ_1^* — случайная разность фаз суммируемых колебаний.

Известно, что плотность вероятности суммы (разности) двух случайных величин, равномерно распределенных на равных ин-

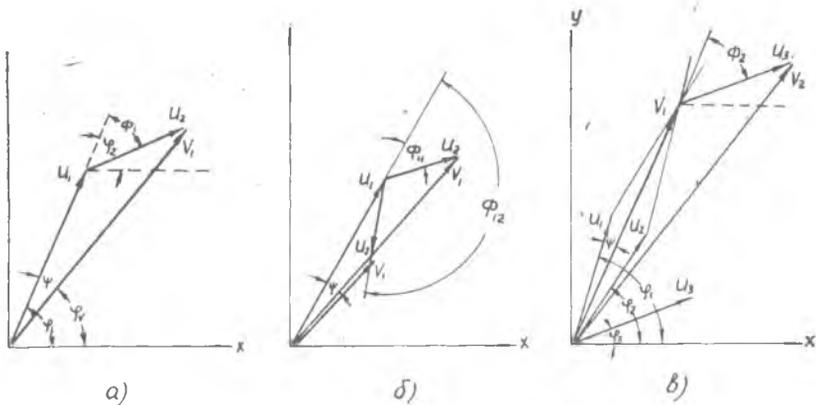


Рис. 2.

* Выражение для плотности вероятности модуля суммы произвольного числа независимых векторов приведено в [2]. Однако это выражение является сложным, поэтому здесь рассматриваются частные решения.

тервалах, имеет вид, показанный на рис. 3а (1). Однако при суммировании случайных фаз следует учесть цикличность изменения фазы на интервале $(-\pi, \pi)$. Нетрудно убедиться в том, что с учетом указанной цикличности изменения фазы разность фаз Φ_1 будет также равномерно распределена на интервале $(-\pi, \pi)$, то есть (рис. 3б):

$$\omega_1^*(\Phi_1) = \frac{1}{2\pi}, \quad |\Phi_1| \leq \pi. \quad (4)$$

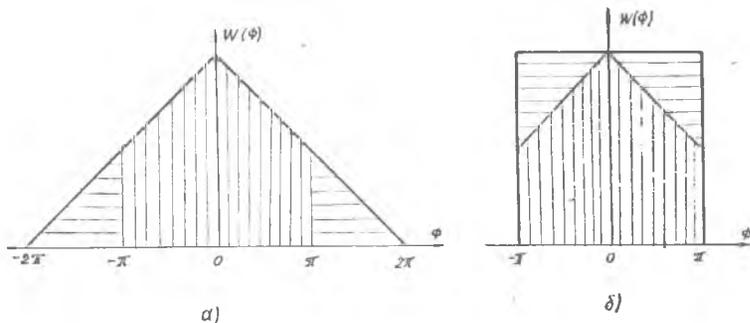


Рис. 3.

Задача определения распределения вероятности огибающей $W(V_1)$ сводится к замене переменной в плотности вероятности (4), согласно функции (3).

Для обратной функции $\Phi_1 = \Phi_1(V_1)$ можно написать

$$\Phi_1 = \arccos \frac{V_1^2 - U_1^2 - U_2^2}{2U_1 U_2}. \quad (5)$$

Якобиан преобразования равен:

$$\left| \frac{d\Phi_1}{dV_1} \right| = \frac{2V_1}{\sqrt{2(U_1^2 V_1^2 + U_2^2 V_1^2 + U_1^2 U_2^2) - V_1^4 - U_1^4 - U_2^4}}. \quad (6)$$

Учитывая, что функция (5) на интервале $(-\pi, \pi)$ двузначна, по известным правилам преобразования плотностей вероятности [1] [2] получим, согласно выражениям (4), (5) и (6),

$$W(V_1) = \frac{2V_1}{\pi \sqrt{2(U_1^2 V_1^2 + U_2^2 V_1^2 + U_1^2 U_2^2) - V_1^4 - U_1^4 - U_2^4}}, \quad |U_1 - U_2| \leq V_1 \leq U_1 + U_2. \quad (7)$$

Для интегральной функции распределения вероятности $P(V_1)$, огибающей V_1 можно написать:

$$P(V_1) = P(V_1^* < V_1) = \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{2V_1^2 - [(U_1 - U_2)^2 + (U_1 + U_2)^2]}{4U_1 U_2} + \frac{1}{2}, \quad |U_1 - U_2| \leq V_1 \leq U_1 + U_2. \quad (8)$$

В случае, если амплитуды компонент процесса одинаковы $U_1=U_2=U$, то выражения (7) и (8) упрощаются и соответственно имеют вид:

$$W(V_1) = \frac{2}{\pi \sqrt{4U^2 - V_1^2}}, \quad 0 \leq V_1 \leq 2U, \quad (9)$$

и

$$P(V_1) = P(V_1^* < V_1) = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{V_1}{2U}, \quad 0 \leq V_1 \leq 2U. \quad (10)$$

Графики дифференциальной $W(V_1)$ и интегральной $P(V_1)$ функций распределения вероятности, построенные согласно выражениям (7), (8), (9) и (10), приведены на рис. 4 а и б соответственно.

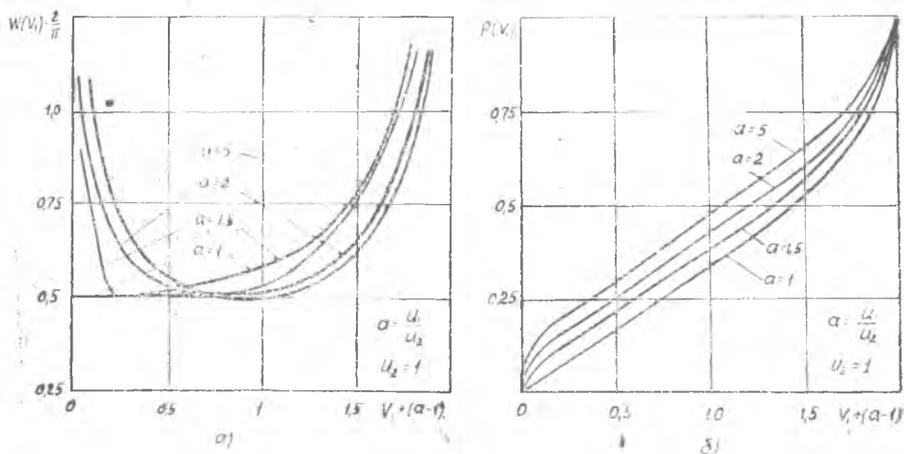


Рис. 4.

Как видно из формул (9), (10) и графиков рис. 4 а и б, в случае равенства амплитуд $U_1=U_2=U$ функции распределения огибающей суммы двух синусоид со случайными начальными фазами с точностью до постоянного множителя совпадают с ветвью, соответствующей положительным значениям аргумента, функций распределения одной синусоиды со случайной фазой [2].

Может представить интерес величина скачка фазы ψ^* , имеющего место при суммировании с колебанием $u_1(t)$ колебания $u_2(t)$.

Плотность вероятности $W(\psi)$ может быть определена аналогично $W(V_1)$. В самом деле, из рис. 2а следует, что

$$(U_1 + U_2 \cos \Phi_1) \operatorname{tg} \psi = U_2 \sin \Phi_1$$

и

$$\psi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sin \Phi_1}{a + \cos \Phi_1}, \quad (11)$$

где $a = \frac{U_1}{U_2}$.

Функцию $\Phi_1 = \Phi_1(\psi)$ удобно определить непосредственно по рис. 2 б. Предположим, что $a \geq 1$.

Тогда функция $\Phi_1 = \Phi_1(\psi)$ двузначна:

$$\Phi_{11}(\psi) = \operatorname{arc} \sin(a \sin \psi) + \psi, \quad (12)$$

$$\Phi_{12}(\psi) = \pi + \psi - \operatorname{arc} \sin(a \sin \psi). \quad (13)$$

Дифференцируя выражения (12) и (13), получим якобиан преобразования

$$\left| \frac{d\Phi_1}{d\psi} \right| = \frac{a \cos \psi}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \psi}} \pm 1. \quad (14)$$

Учитывая поведение функции (11) при $|\Phi_1| \leq \pi$, получим, согласно (3), (11), (12) и (13), выражение для плотности вероятности фазы:

$$W(\psi) = \frac{1}{\pi} \frac{a \cos \psi}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \psi}}, \quad |\psi| \leq \operatorname{arc} \sin \frac{1}{a}, \quad a \geq 1. \quad (15)$$

Соответственно для интегральной функции распределения $P(\psi)$ можно написать: $P(\psi) = P(\psi^* < \psi) =$

$$= \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \sin(a \sin \psi) + \frac{1}{2}, \quad |\psi| \leq \operatorname{arc} \sin \frac{1}{a}, \quad a \geq 1. \quad (16)$$

При равных амплитудах $U_1 = U_2$ скачок фазы ψ имеет равномерное распределение на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то есть

$$W(\psi) = \frac{1}{\pi}, \quad |\psi| \leq \frac{\pi}{2}. \quad (17)$$

В случае, если $a < 1$, то есть $U_1 < U_2$, функция $\Phi_1 = \Phi_1(\psi)$ становится однозначной и определяется выражением (12).

При этом плотность вероятности $W(\psi)$ имеет вид

$$W(\psi) = \frac{1}{2\pi} \left(-1 + \frac{a \cos \psi}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \psi}} \right), \quad |\psi| \leq \pi. \quad (18)$$

Графики функций $W(\psi)$, $P(\psi)$, построенные по формулам (15), (16), (17) и (18), приведены на рис. 5а и б, 6.

Как видно из графиков, при $a < 1$ величина скачка фазы ψ^* может принимать все возможные значения на интервале $(-\pi, \pi)$. При этом по мере увеличения a вероятность больших скачков фазы уменьшается. При $a > 1$ величина возможного скачка фазы

не может превышать $\pm \frac{\pi}{2}$ и уменьшается по мере увеличения a .

Фаза суммарного колебания φ_v^* (рис. 2 а) может быть определена как сумма $\varphi_v = \varphi_1 + \varphi$. Известно [1], [2], что плотность вероятности суммы независимых случайных величин определяется сверткой их плотностей вероятности.

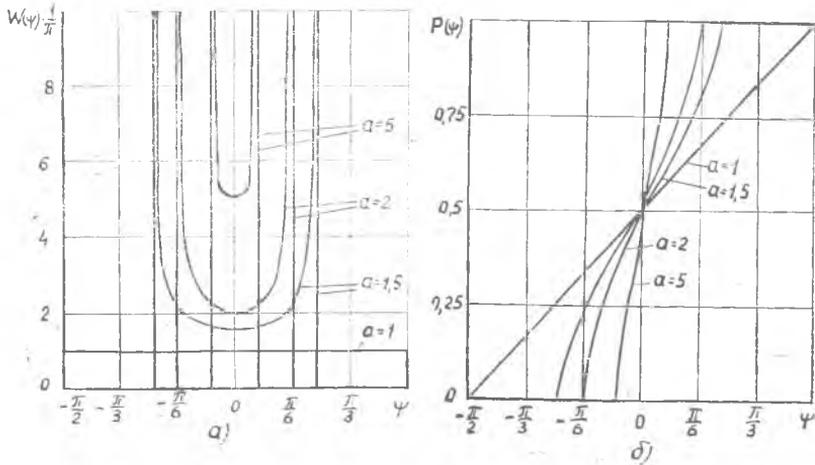


Рис. 5.

Вычисляя свертку выражений (2) и (15), получим

$$W(\varphi_v) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arcsin(a \sin \psi) \right] \\ \text{при } -\left(\arcsin \frac{1}{a} + \pi \right) \leq \varphi_v \leq \arcsin \frac{1}{a} - \pi, \\ \frac{1}{2\pi} \text{ при } \arcsin \frac{1}{a} - \pi \leq \varphi_v \leq \pi - \arcsin \frac{1}{a}, \\ \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin(a \sin \psi) \right] \\ \text{при } \pi - \arcsin \frac{1}{a} \leq \varphi_v \leq \pi + \arcsin \frac{1}{a}. \end{cases} \quad (19)$$

В формуле (19) предполагается, что $a = \frac{U_1}{U_2} \geq 1$. Здесь достаточно рассмотреть только этот случай.

При $a=1$ выражение (19) упрощается и имеет вид

$$W(\varphi_v) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_v \right), & -\frac{3}{2}\pi \leq \varphi_v \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2\pi}, & -\frac{\pi}{2} \leq \varphi_v \leq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{\pi}{2} + \varphi_v \right), & \frac{\pi}{2} \leq \varphi_v \leq \frac{3}{2}\pi. \end{cases} \quad (20)$$

Графики плотности вероятности $W(\varphi_v)$ приведены на рис. 7.

Как следует из выражений (7), (15), (19), огибающая V_1^* и фазы ψ^* и φ_v являются зависимыми случайными величинами.

Перейдем к рассмотрению суммы трех колебаний вида (1). При этом ограничимся определением плотности вероятности огибающей V_2 этой суммы.

Первоначально предположим, что огибающая суммы двух колебаний V_1 известна, и определим условную плотность вероятности $W(v_2/v_1)$. Иначе говоря, будем искать распределение огибающей суммы трех колебаний V_2 , как сумму колебаний с огибающими V_1 и U_3 (рис. 2 в).

Нетрудно убедиться в том, что сдвиг фаз $\Phi_2 = \varphi_v - \varphi_3$ компонент этой суммы имеет плотность вероятности, аналогичную (19). Сдвиг фаз Φ_2 можно рассматривать как разность фаз первого и третьего колебаний $\varphi_1 - \varphi_3$ плюс (минус) сдвиг ψ , возникающий при суммировании первого и второго колебаний. Согласно приведенным выше рассуждениям, разность фаз $\varphi_1 - \varphi_3$ имеет равномерное распределение вероятности на интервале $(-\pi, \pi)$ с плотностью (4). Свертка плотности вероятности (4) разности фаз $\varphi_1 - \varphi_3$ и плотности вероятности (15) сдвига фаз ψ приводит к выражению вида (19). Перепишем формулу (19) с учетом новых обозначений:

$$W(\Phi_2) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arcsin(a \sin \Phi_2) \right], \\ \text{при } -\left(\arcsin \frac{1}{a} + \pi \right) \leq \Phi_2 \leq \arcsin \frac{1}{a} - \pi, \\ \frac{1}{2\pi} \text{ при } \arcsin \frac{1}{a} - \pi \leq \Phi_2 \leq \pi - \arcsin \frac{1}{a}, \\ \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin(a \sin \Phi_2) \right], \\ \text{при } \pi - \arcsin \frac{1}{a} \leq \Phi_2 \leq \pi + \arcsin \frac{1}{a}. \end{cases} \quad (21)$$

Задача определения условной плотности вероятности $W(v_2/v_1)$ сводится к преобразованию плотности вероятности (21) способом, аналогичным использованному выше при определении плотности вероятности $W(V_1)$.

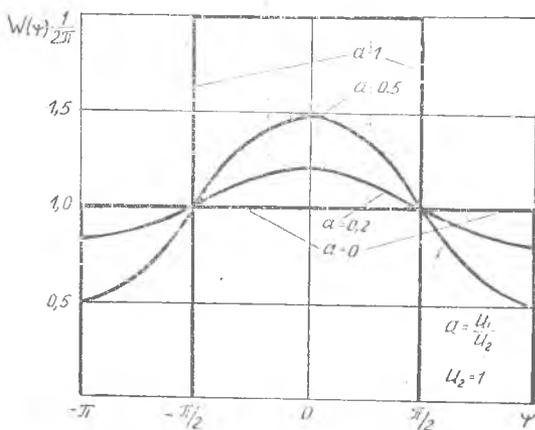


Рис. 6.

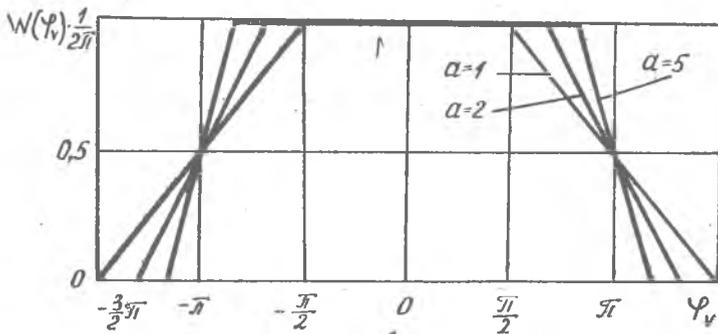


Рис. 7.

В результате вычислений получим

$$W(V_2/V_1) = \frac{2V_2}{\pi \sqrt{2(V_1^2 V_2^2 + U_3^2 V_2^2 + V_1^2 U_3^2) - V_1^4 - V_2^4 - U_3^4}}. \quad (22)$$

Совместная плотность вероятности огибающих сумм двух и трех колебаний вида (1) определяется произведением выражений (7) и (22). В результате получим

$$W(V_1, V_2) = \frac{4V_1 V_2}{\pi^2 \sqrt{[V_1^2 - (V_2 - U_3)^2] [V_1^2 - (V_2 + U_3)^2] [V_1^2 - (U_1 - U_2)^2] [V_1^2 - (U_1 + U_2)^2]}}. \quad (23)$$

Для определения интересующей нас одномерной плотности вероятности $W(V_2)$ проинтегрируем выражение (23) по V_1 ;

$$W(V_2) = \frac{4V_2}{\pi^2} \int \frac{V_1 dV_1}{\sqrt{[V_1^2 - (V_2 - U_3)^2] [V_1^2 - (V_2 + U_3)^2] [V_1^2 - (U_1 - U_2)^2] [V_1^2 - (U_1 + U_2)^2]}}. \quad (24)$$

Интеграл (24) берется в пределах, определяемых областью существования подынтегральной функции. Этот интеграл является табличным [3] и выражается через неполные эллиптические интегралы первого рода.

В целях упрощения рассмотрим наиболее интересный случай $U_1 = U_2 = U_3 = U$. Тогда выражение (24) можно переписать в виде

$$W(V_2) = \begin{cases} \frac{2V_2}{\pi^2} \int_{(V_2-U)^2}^{4U^2} \frac{dz}{\sqrt{z[z - (V_2-U)^2][z - (V_2+U)^2](z-4U)}}, & V_2 > U, \\ \frac{2V_2}{\pi^2} \int_{(U-V_2)^2}^{(U+V_2)^2} \frac{dz}{\sqrt{z[z - (V_2-U)^2][z - (V_2+U)^2](z-4U)}}, & V_2 < U. \end{cases} \quad (25)$$

Здесь $z = V_1^2$.

В результате вычислений получим

$$W(V_2) = \begin{cases} \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{V_2}{U^3}} K(k_1), & U \leq V_2 \leq 3U, \\ \frac{1}{\pi^2} \frac{V_2}{(U+V_2) \sqrt{4U^2 - (U-V_2)^2}} K(k_2), & 0 < V_2 < U, \end{cases}$$

где

$$k_1^2 = \frac{(V_2 + U)^2 [4U^2 - (V_2 - U)^2]}{16U^3 V_2}$$

$$k_2^2 = \frac{16U^3 V_2}{(V_2 + U)^2 [4U^2 - (U - V_2)^2]} \quad (27)$$

Здесь $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, табулированный, например, в [4].

Известно представление эллиптических интегралов через гипергеометрическую функцию [3]. В этом случае

$$W(V_2) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{V_2}{U^3}} F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k_1^2\right), & U \leq V_2 \leq 3U, \\ \frac{1}{2\pi} \frac{V_2}{(V_2 + U) \sqrt{4U^2 - (U - V_2)^2}} F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k_2^2\right), & 0 \leq V_2 \leq U, \end{cases} \quad (28)$$

где $F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right)$ — гипергеометрическая функция.

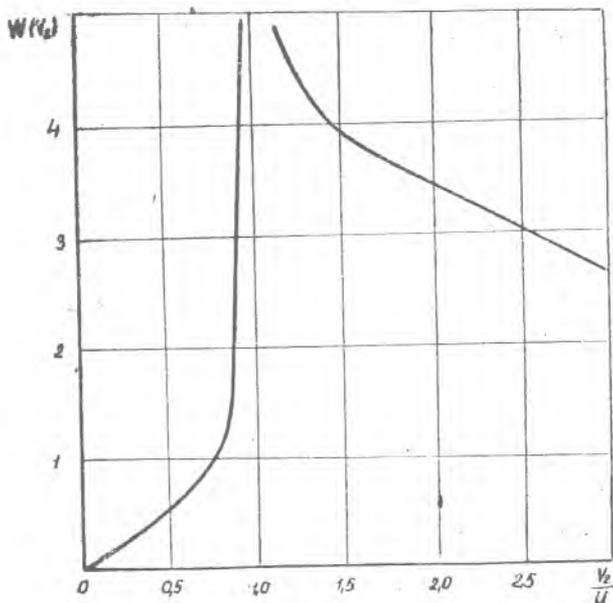


Рис. 8.

Заметим, что гипергеометрический ряд своими первыми членами $k_1^0 \ll 1$ при $V_2 \rightarrow 3U$ и $k_2^0 \ll 1$ при $V_2 \ll U$. При этом быстро сходится и может быть представлен

$${}_1F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right) = 1 + 2\frac{k^2}{8} + 9\left(\frac{k^2}{8}\right)^2 + \dots$$

Таким образом, вычисления по (28) в асимптотических случаях существенно упрощаются. График плотности вероятности, построенный по формуле (27), приведен на рис. 8. Из графика видно, что наиболее вероятны значения огибающей V_2 , близкие к амплитуде слагаемых колебаний U .

Приведенные в статье характеристики суммы случайных колебаний позволяют вычислить математические ожидания и дисперсии параметров процесса, вероятности выхода их за некоторый уровень и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Тихонов. Статистическая радиотехника, «Советское радио», 1966.
2. Б. Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники, книга I; «Советское радио», 1966.
3. И. С. Граштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Гос. изд. физико-математической литературы, 1963.
4. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш. Специальные функции, «Наука», 1964.

