

В. А. СОЙФЕР,  
В. А. ДЕНИСОВ,  
В. Е. ШАТЕРНИКОВ,

## ВЛИЯНИЕ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ НА ВНОСИМЫЕ ПАРАМЕТРЫ ВИХРЕТОКОВЫХ ДАТЧИКОВ

Вихретоковые проводниковые датчики в основном применяются для контроля геометрических параметров движущихся объектов — радиальных зазоров и углов упругой раскрутки лопаток авиационных двигателей, профилей коллекторов электрических машин, радиусов кривизны и т. д.

Скорости движения объектов могут достигать значительных величин, что, несомненно, оказывает влияние на выходные параметры датчика. Рассмотрим этот вопрос с количественной стороны.

Принятая для расчета модель (электрическая нить над движущимся проводящим полупространством) представлена на рис. 1. Вопросы расчета поля для этой системы рассмотрены Ю. К. Федосенко. В данной работе определим влияние скорости на вносимые параметры датчика. Выражения вектора-потенциала верхнего (I) и нижнего (II) полупространств имеют вид [1]:

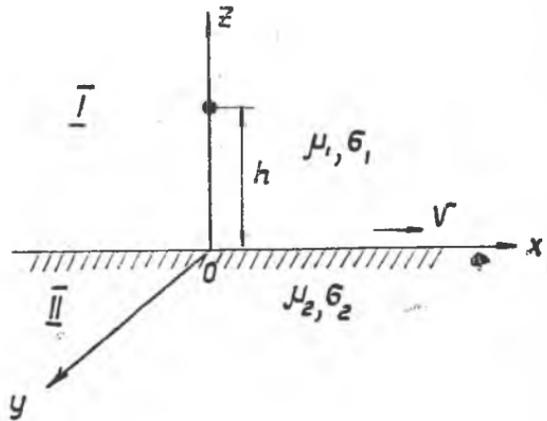


Рис. 1

$$A_{1y} = \frac{\mu_1 I}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{q_1} [e^{-q_1(z-h)} + L_1 e^{-q_1(z+h)}] e^{jx\alpha} d\alpha \quad (1)$$

$$A_{11y} = \frac{\mu_2 I}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{l^{-q} \cdot h}{q_2} \cdot (k_2 l^{+q_2 h} + L_2 l^{-q_2 h}) l^{ix} dx, \quad (2)$$

где  $p^2 = \omega \mu_2 \sigma_2$ ,  $m^2 = v \mu_2 \sigma_2$  ( $v$  — приведенная скорость).

Уравнение  $q^2 = \alpha^2 + j(\alpha m + p^2)$  в предположении:  $\mu_1 = \mu_2$ ,  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_2 > 0$  дает

$$\begin{cases} q_1 = \pm \alpha \\ q_2 = \pm \sqrt{\alpha^2 + j(\alpha m + p^2)}. \end{cases} \quad (3)$$

$$L_1 = \frac{1}{2} \frac{q_1 - q_2}{q_1 + q_2}, \quad L_2 = 0, \quad K_2 = \frac{2q_2}{q_1 + q_2}.$$

Для определения вносимых параметров датчика необходимо вычислить напряженность электрического поля в точке  $(0, h)$ . Учитывая, что  $E = -j\omega A$ , и выбирая решение (3) из условий физического существования поля, получим из (1)

$$E_{1y} = -j\omega \mu \frac{I}{2\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + j\alpha m + jp^2}}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + j\alpha m + jp^2}} e^{-2h\alpha} \right] d\alpha + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha} \left[ 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - j\alpha m + jp^2}}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + j\alpha m + jp^2}} e^{-2h\alpha} \right] d\alpha \right\}. \quad (4)$$

Комплексное сопротивление на единицу длины определится из формулы

$$z_{10} = (R_{10} + R_{\text{вно}}) + j(X_{10} - X_{\text{вно}}) = \frac{E_{1y_0}}{I}. \quad (5)$$

Для того чтобы получить аналитическое выражение для вносимых параметров, нужно проинтегрировать (4). Вводя новую безразмерную переменную интегрирования  $x = \frac{\alpha}{p}$ , освобождаясь от иррациональности в знаменателе и группируя члены, получим из (4)

$$E_{1y} = -j\omega \mu \frac{I}{2\pi} \left[ 2 \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-2hp x}}{x} - j \int_0^{\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + j \left(1 + \frac{m}{p} x\right)}}{1 + x \frac{m}{p}} \times \right. \\ \left. \times e^{-2hp x} dx - j \int_0^{\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + j \left(1 - \frac{m}{p} x\right)}}{1 - \frac{m}{p} x} e^{-2hp x} dx \right]. \quad (6)$$

Параметр  $hp$  в этих интегралах характеризует расстояние от датчика до объекта,  $\frac{m}{p}$  — соотношение между приведенной скоростью и частотой питания датчика.

Легко показать, что первый интеграл в (6) характеризует собственные параметры датчика, а поскольку здесь определяются вносимые параметры, то этот интеграл нас не интересует и в дальнейшем не рассматривается.

Для вычисления 2-го интеграла в выражении (6) разделим его на две части:

$$\int_0^{\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + j\left(1 + \frac{m}{p}x\right)}}{1 + \frac{m}{p}x} e^{-2hp x} dx = \int_0^{\infty} \frac{x e^{-2hp x}}{1 + \frac{m}{p}x} dx - \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^2 + j\left(1 + \frac{m}{p}x\right)}}{1 + \frac{m}{p}x} e^{-2hp x} dx. \quad (7)$$

Вычисление первого интеграла в выражении (7) выполняется просто и дает результат:

$$I_1 = \frac{1}{2\beta\xi} + \frac{1}{\xi^2} e^{2\frac{\beta}{\xi}} \cdot Ei\left(-2\frac{\beta}{\xi}\right), \quad (8)$$

где  $\beta = hp$ ,  $\xi = \frac{m}{p}$ .

Для  $2\frac{\beta}{\xi} \gg 1$  (что всегда выполняется на практике), используя известную асимптотику (при больших аргументах) интегральной показательной функции [2]:

$$tEi(-t)t^t \approx -1 + \frac{1!}{t} - \frac{2!}{t^2} + \frac{3!}{t^3} \dots$$

получим из (8):

$$I_1 \approx \frac{1}{2\beta^2} \left(1 - \frac{\xi}{\beta}\right) + 0 \left[ \frac{1}{2\left(\frac{\beta}{\xi}\right)^3} \right]. \quad (9)$$

Вычисление второго интеграла в выражении (7)

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^2 + j(1 + \xi x)}}{1 + \xi x} e^{-2\beta x} dx. \quad (10)$$

сопряжено со значительными математическими трудностями. Через известные специальные функции он не выражается, а для численных расчетов в (9) выделим вещественную и мнимую части:

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (I_3 + jI_4), \quad (11)$$

где 
$$I_3 = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\sqrt{x^4 + (1 + \xi x)^2} + x^2}}{1 + \xi x} e^{-2\beta x} dx, \quad (12)$$

$$I_4 = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\sqrt{x^4 + (1 + \xi x)^2} - x^2}}{1 + \xi x} e^{-2\beta x} dx. \quad (13)$$

Табулирование функций (12)–(13) выполнено на ЭВЦМ «Урал-2». Затем, аналогичным образом, определяем 3-й интеграл в выражении (6):

$$\int_0^{\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + j(1 - \xi x)}}{1 - \xi x} l^{-2\beta x} dx = I_5 - j \frac{1}{\sqrt{2}} I_6, \quad (14)$$

где 
$$I_5 = \int_0^{\infty} \frac{x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{x^4 + (1 - \xi x)^2} + x^2}}{1 - \xi x} e^{-2\beta x} dx, \quad (15)$$

$$I_6 = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\sqrt{x^4 + (1 - \xi x)^2} - x^2}}{1 - \xi x} e^{-2\beta x} dx. \quad (16)$$

Табулирование функций (15)–(16) также выполнено на ЭВЦМ. Значительный интерес представляют приближенные формулы для вычисления интегралов  $I_3$ ,  $I_4$ ,  $I_5$  и  $I_6$ .

при  $\xi \ll 1$  будем иметь:

$$I_3 = \frac{0,57}{\beta} (1 - e^{-2\beta}) + \sqrt{2} e^{-2\beta} \left[ \frac{1}{(2\beta)^2} + \frac{1}{2\beta} \right] - \sqrt{2} e^{-2\beta} \frac{\beta}{\xi} \left[ \frac{1}{(2\beta)^2} + \frac{1}{2\beta} \right]. \quad (17)$$

Откуда при  $\beta \gg 1$  получим

$$I_3 \approx \frac{0,57}{\beta} - 0,7 \frac{1}{\beta \xi} e^{-2\beta} \frac{\beta}{\xi}. \quad (18)$$

Сравнение значений  $I_3$ , вычисленных по формуле (18), с табличными показывает, что этой формулой можно пользоваться при  $\beta \gg 1$ ,  $\xi \leq 0,3$  с погрешностью менее 5%, причем погрешность уменьшается с ростом  $\beta$  и уменьшением  $\xi$ .

Для интегралов  $I_4$  и  $I_6$ , в предположении  $\xi \ll 1$  получена приближенная формула

$$I_4 \approx I_6 \approx \frac{1}{2\beta} \left\{ 1 - \frac{\pi}{2} [H_1(2\beta) - N_1(2\beta)] \right\}, \quad (19)$$

где  $H_1(2\beta)$  — функции Струве,  $N_1(2\beta)$  — функция Неймана. При  $\beta \gg 1$  из (19) следует.

$$I_4 = I_6 \approx \frac{1}{2\beta}. \quad (20)$$

Формулой (20) можно пользоваться при  $\beta \geq 2$  с погрешностью, не превышающей 5—6%. Как видно из (19), (20), в эти формулы не входит параметр  $\xi$ . Слабое влияние изменений этого параметра на  $I_4$  и  $I_6$  видно и из их табулированных значений. Интеграл  $I_5$  при ранее принятых допущениях приближенно вычисляется по формуле

$$I_5 \approx -\frac{1}{\sqrt{2}} I_3 + \frac{1}{\xi} e^{-2 \frac{\beta}{\xi}} \approx \frac{1}{\xi} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) e^{-2 \frac{\beta}{\xi}} - \frac{0,57}{\sqrt{2} \beta}. \quad (21)$$

С учетом полученных формул (5)—(16) выражения для вносимых в датчик активного и реактивного сопротивлений на единицу длины можно записать в виде

$$R_{\text{вно}} = \frac{\omega \mu}{2\pi} \left[ -\frac{1}{29\xi} - \frac{1}{\xi^2} I^2 \frac{\beta}{\xi} E_i \left(-2 \frac{\beta}{\xi}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} I_3 - I_5 \right], \quad (22)$$

$$X_{\text{вно}} = \frac{\omega \mu}{2\pi} [I_4 + I_6], \quad (23)$$

где  $I_3(\beta, \xi)$ ,  $I_4(\beta, \xi)$ ,  $I_5(\beta, \xi)$  и  $I_6(\beta, \xi)$  рассчитаны на ЭВМ и протабулированы.

При  $\xi \ll 1$  ( $\xi \leq 0,3$ );  $\beta \gg 1$  ( $\beta \geq 2$ ) будем иметь

$$R_{\text{вно}} \approx \frac{\omega \mu}{2\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{2} \beta} - \frac{1}{2\beta^2} \left(1 - \frac{\xi}{\beta}\right) - \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{1}{\xi} e^{-2 \frac{\beta}{\xi}} \right], \quad (24)$$

$$X_{\text{вно}} \approx \frac{\omega \mu}{2 \sqrt{2} \pi \beta}. \quad (25)$$

Отсюда видно, что при  $\frac{\xi}{\beta} = \frac{1}{\omega h} \cdot \sqrt{\frac{v}{\mu^2 \sigma_2}} \ll 1$  влияние скорости на вносимое активное и реактивное сопротивление незначительно. Например при  $\omega = 2\pi \cdot 10^6 \frac{1}{\text{сек}}$ ,  $\mu_2 = \mu_0$ ,  $\sigma_2 = 1 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{ом} \cdot \text{м}}$ ,  $h \approx 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ,  $v = 100 \frac{1}{\text{сек}}$  величины  $R_{\text{вно}}$  и  $X_{\text{вно}}$  практически не зависят от скорости и

$$\frac{\xi}{\beta} \approx \frac{1}{320}.$$

Более сильное влияние на вносимые параметры оказывают большие скорости движения при малых зазорах  $h$ , при этом необходимо, иметь в виду, что воздействие изменений скорости на вносимую индуктивность значительно меньше, чем на вносимое сопротивление.

Таким образом, чтобы уменьшить влияние скорости вращения на вносимые параметры, необходимо повышать частоту питания датчика и увеличивать установочный зазор «безопасности».

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. К. Федосенко. Исследование влияния вихревых токов на выявляемость дефектов в движущихся тонких металлических листах. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. г. Москва. 1965.

2. И. С. Градштейн, И. Н. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Издательство Ф М, Москва, 1963.

