жном напряженном состоянии, можно построить картину распределения напряжений в поверхностных слоях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вонсовский С. В. Магнетизм. М., 1971.
2. Бозорт Р. Ферромагнетизм. ИИЛ, М., 1956.
3. Колачевский Н. Н. Физика металлов и металловедение. II, № 2, 211, (1961).
4. Пустынников В. Г., Васильев В. М. Дефектоскопия. № 4. 1973.
5. Шульце Г. Металлофизика. Изд. «Мир», М., 1971.

В. Е. ШАТЕРНИКОВ

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ ВЕКТОРНОГО ПОТЕНЦИАЛА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СФЕРОИДАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

Для расчета электромагнитного поля системы «круговой контур с током — электропроводящий сфероид» выберем систему координат сплющенного сфероида (ζ, η, φ), которая связана с декартовой (x, y, z) следующими соотношениями [1]:

$$x = a\sqrt{(\xi^2+1)(1-\eta^2)}\cos\varphi.$$
$$y = a\sqrt{(\xi^2+1)(1-\eta^2)}\sin\varphi. \qquad (1)$$
$$z = a\eta\xi$$

где $0\leqslant\xi\leqslant\infty$, $-1\leqslant\eta\leqslant+1$, $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$.

В этом случае граничные условия упрощаются и задача является осесимметричной. В данной системе координат имеется только одна составляющая стороннего тока и векторного потенциала: $\overline{A}=\overline{Q}_\varphi\ \overline{A}_\varphi$. Электромагнитное поле описывается неоднородным векторным уравнением Гельмгольца:

$$\Delta\overline{A} + k^2\overline{A} = -\mu_0\mu_1 j_{\text{ст}}, \qquad (2)$$

где $k^2 = -i\mu_0\mu_2\sigma_2\omega$,

$i_{\text{ст}}$ — плотность стороннего тока. Для вывода этого уравнения в сфероидальной системе координат необходимо получить выражение для Лапласиана вектор-потенциала A в данной системе, так как в известной литературе имеются формулы «Δ» только для декартовой, цилиндрической и сферической системы координат [2]. Лапласиан от векторной функции A определяется формулой:

$$\Delta\overline{A} = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\overline{A}) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\overline{A}). \qquad (3)$$

Известно [1], что для ортогональных криволинейных, в частности сфероидальных координат (ζ, η, φ) с единичными векторами $\bar{a}_\varphi$, $\bar{a}_\xi$, $\bar{a}_\eta$, первое слагаемое в выражении (3) имеет вид

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div}\bar{A}) = \frac{1}{h_\xi}\frac{\partial(\operatorname{div}\bar{A})}{\partial\xi}\bar{a}_\xi + \frac{1}{h_\eta}\frac{\partial(\operatorname{div}\bar{A})}{\partial\eta}\bar{a}_\eta + \frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial(\operatorname{div}\bar{A})}{d\varphi}\bar{a}_\varphi, \quad (4)$$

где $\operatorname{div}\bar{A} = \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(h_\eta h_\varphi A_\xi) + \frac{\partial}{\partial\eta}(h_\xi h_\eta h_\varphi) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(h_\xi h_\eta A_\varphi)\right]$

$$\left.\begin{aligned} h_\xi &= a\sqrt{\frac{\eta^2+\xi^2}{1+\xi^2}} \\ h_\eta &= a\sqrt{\frac{\xi^2+\eta^2}{1-\eta^2}} \\ h_\varphi &= a\sqrt{(1+\xi^2)(1-\eta^2)} \end{aligned}\right\} \text{— коэффициенты Ламе в системе координат сплющенного сфероида.} \quad (5)$$

Тогда

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div}\bar{A}) = \frac{1}{h_\xi}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{1}{h_\eta h_\xi h_\varphi}\frac{\partial}{\partial\xi}(h_\eta h_\varphi A_\xi)\right] + \right.$$

$$+ \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{1}{h_\eta h_\xi h_\varphi}\frac{\partial}{\partial\eta}(h_\xi h_\varphi A_\eta)\right] + \left.\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{1}{h_\xi h_\eta h_\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(h_\xi h_\eta A_\varphi)\right]\right\}\bar{a}_\xi +$$

$$+ \frac{1}{h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{h_\xi h_\eta h_\varphi}(h_\eta h_\varphi A_\xi)\right] + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{1}{h_\xi h_\eta h_\varphi}\frac{\partial}{\partial\eta}(h_\xi h_\varphi A_\eta)\right] + \right.$$

$$+ \left.\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{1}{h_\xi h_\eta h_\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(h_\xi h_\eta A_\varphi)\right]\right\}\bar{a}_\eta + \frac{1}{h_\varphi}\left\{\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{1}{h_\xi h_\eta h_\varphi}\times\right.\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial}{\partial\xi}(h_\eta h_\varphi A_\xi)\right] + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{1}{h_\xi h_\eta h_\varphi}\frac{\partial}{\partial\eta}(h_\xi h_\varphi A_\eta)\right] +$$

$$\left.+ \frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{1}{h_\xi h_\eta h_\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(h_\xi h_\eta A_\varphi)\right]\right\}\bar{a}_\varphi. \quad (6)$$

Поскольку в выбранной нами системе координат поле осесимметрично, т. е. $\bar{A}_\xi = 0$, $\bar{A}_\eta = 0$ и производные по φ равны 0, то из (6) получим, что

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div}\bar{A}) = 0. \quad (7)$$

В данной системе координат определим

$$\operatorname{rot}\bar{A} = \frac{1}{h_\xi h_\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}(h_\varphi A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(h_\eta A_\eta)\right]\bar{a}_\xi +$$

$$+ \frac{1}{h_\xi h_\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}(h_\xi A_\tau) - \frac{\partial}{\partial\xi}(h_\varphi A_\xi)\right]\bar{a}_\eta +$$

$$+ \frac{1}{h_\xi h_\eta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(h_\xi A_\xi) - \frac{\partial}{\partial\eta}(h_\xi A_\xi)\right]\bar{a}_\varphi \quad (8)$$

Теперь 2-ое слагаемое в формуле (3) равняется:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{A} = \frac{1}{h_\eta h_\varphi}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{h_\varphi}{h_\xi h_\eta}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}(h_\eta A_\eta)\right] - \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{h_\varphi}{h_\xi h_\eta}\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}(h_\xi \overline{A}_\xi)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{h_\eta}{h_\xi h_\varphi}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}(h_\xi A_\xi)\right] + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{h_\zeta}{h_\xi h_\varphi}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}(h_\varphi A_\varphi)\right]\right\}\overline{a}_\xi +$$

$$+ \frac{1}{h_\xi h_\varphi}\left\{\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{h_\xi}{h_\eta h_\varphi}\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}(h_\varphi A_\varphi)\right] - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{h_\xi}{h_\eta h_\varphi}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}(h_\eta A_\eta)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{h_\varphi}{h_\xi h_\eta}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}(h_\eta A_\eta)\right] + \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{h_\varphi}{h_\xi h_\eta}\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}(h_\xi A_\xi)\right]\right\}\overline{a}_\eta +$$

$$+ \frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{h_\eta}{h_\xi h_\varphi}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}(h_\xi A_\xi)\right] - \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{h_\eta}{h_\xi h_\varphi}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}(h_\varphi A_\varphi)\right] - \right.$$

$$- \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{h_\xi}{h_\eta h_\varphi}\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}(h_\varphi A_\varphi)\right] +$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{h_\xi}{h_\eta h_\varphi}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}(h_\eta A_\eta)\right]\right\}\overline{a}_\varphi. \tag{9}$$

Учитывая осесимметричность, получим выражение

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{A} = \frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{h_\eta}{h_\xi h_\varphi}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}(h_\varphi A_\varphi)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{h_\xi}{h_\eta h_\varphi}\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}(h_\varphi A_\varphi)\right]\right\} = \Delta\overline{A}, \tag{10}$$

определяющее, с учетом условия (7), Лапласиан в криволинейной системе координат. Если в выражение (10) подставить значения коэффициентов Ламе (5) для системы координат сплющенного сфероида, то

$$\Delta\overline{A} = \frac{1}{a^2(\xi^2+\eta^2)}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(1+\xi^2)\frac{\partial\dot{A}}{\partial\xi}\right] + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{\partial\dot{A}}{\partial\eta}\right]\right\} -$$

$$- \frac{1}{a^2(1-\eta^2)(1+\xi^2)}\cdot\dot{A}. \tag{11}$$

Приравняв правую часть выражения (2) нулю, с учетом (11), после преобразований получим однородное уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(1+\xi^2)\frac{\partial\dot{A}}{\partial\xi}\right] + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{\partial\dot{A}}{\partial\eta}\right] -$$

$$- \frac{(\eta^2+\xi^2)}{(1-\eta^2)(1+\xi^2)}\dot{A} - h^2(\xi^2+\eta^2)\dot{A} = 0, \tag{12}$$

где $h^2 = -a^2\kappa^2$.

Полагая $h=0$, получим уравнение Лапласа в системе сплющенного сфероида:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[(1+\xi^2)\frac{\partial \dot{A}}{\partial \xi}\right]+\frac{\partial}{\partial \eta}\left[(1-\eta^2)\,\frac{\partial \dot{A}}{\partial \eta}\right]+\frac{1}{1+\xi^2}\,\dot{A}-\frac{1}{1-\eta^2}\,\dot{A}=0, \qquad (13)$$

а в результате — исходные уравнения в частных производных для расчета электромагнитных полей в системе координат сплющенного сфероида. Аналогичным образом получаются векторные уравнения Гельмгольца в вытянутой сфероидной системе координат, связанных с декартовыми следующими соотношениями [1]:

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{(1-\eta^2)(\xi^2-1)}\cos\varphi\cdot a\\ y &= \sqrt{(1-\eta^2)(\xi^2-1)}\sin\varphi\cdot a\\ z &= a\,\eta\,\xi. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

В этой системе координат поверхность $\xi=\mathrm{const}>1$ является вытянутым эллипсоидом вращения с большой осью:

$$t = 2a\xi_2 \qquad (15)$$

и малой осью:

$$2r = 2a\sqrt{(\xi_2^2-1)} \qquad (16)$$

Лапласиан векторного потенциала A в этом случае также определяется формулой (10). Только коэффициенты Ламе для системы вытянутого сфероида будут другими [2]:

$$\left.\begin{aligned} h_\eta &= a\sqrt{\frac{\xi^2-\eta^2}{1-\eta^2}}\\ h_\xi &= a\sqrt{\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2-1}}\\ h_\varphi &= a\sqrt{(1-\eta^2)(\xi^2-1)} \end{aligned}\right|. \qquad (17)$$

Преобразуя выражение (10) с учетом (17)

$$\Delta A=\frac{1}{a^2(\xi^2-\eta^2)}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left[(\xi^2-1)\frac{\partial A}{\partial \xi}\right]+\frac{\partial}{\partial \eta}\left[(1-\eta^2)\,\frac{\partial A}{\partial \eta}\right]\right\}-$$

$$-\frac{1}{a^2(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\cdot\dot{A}, \qquad (18)$$

нетрудно найти однородное уравнение Гельмгольца для вытянутой системы координат:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[(\xi^2-1)\,\frac{\partial A}{\partial \xi}\right]+\frac{\partial}{\partial \eta}\left[(1-\eta^2)\,\frac{\partial A}{\partial \eta}\right]-\frac{1}{1-\eta^2}\,A-$$

$$-\frac{1}{\xi^2-1}\,A+h^2(\xi^2-\eta^2)\,\dot{A}=0, \qquad (19)$$

где $h^2=a^2k^2$.

Полагая $\kappa=0$, получим уравнение Лапласа в вытянутой системе координат:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\xi^2-1)\frac{\partial A}{\partial\eta}\right]+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(1-\eta^2\right)\frac{\partial A}{\partial\eta}\right]-\frac{1}{1-\eta^2}A-\frac{1}{\xi^2-1}A=0. \quad (20)$$

Анализируя однородные уравнения Гельмгольца и уравнение Лапласа для вытянутой и сплющенной сфероидальной систем координат, нетрудно убедиться, что уравнения (19) и (20) могут быть получены из (12) и (13) путем преобразования $\xi\to -i\xi$, $h\to ih$, т. е. можно сделать заключение о том, что решение, полученное для уравнений Гельмгольца в системе сплющенного сфероида, может быть путем несложных преобразований распространено и для системы «круговой контур с током — вытянутый сфероид».

В исходном неоднородном уравнении Гельмгольца (2) кроме этого необходимо определить сторонний ток ($j_{ст}$). Так как в качестве источника поля в расчетной модели принят круговой контур с током $\dot{I}l^{j\omega t}$, то сторонний ток может быть выражен через δ — функцию Дирака и представлен в сфероидальной системе координат в следующем виде [2]:

$$J_{ст}=\bar{a}_\varphi\dot{I}\,\frac{\sqrt{(1+\xi^2)(1-\eta^2)}}{a^2(\xi^2+\eta^2)}\cdot\delta(\xi-\xi')\cdot\delta(\eta-\eta'), \quad (21)$$

где ξ' и η' — координаты кругового контура с током.

Итак, в сфероидальной системе координат уравнение (2) преобразуется:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(1+\xi^2)\frac{\partial\dot{A}}{\partial\xi}\right]+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{\partial\dot{A}}{\partial\eta}\right]+\left(\frac{1}{1+\xi^2}-\frac{1}{1-\eta^2}\right)\dot{A}-$$

$$-h^2(\xi^2+\eta^2)\dot{A}=-\mu_1\mu_0\dot{I}\,\frac{\sqrt{(1+\xi^2)(1-\eta^2)}}{a^2(\xi^2+\eta^2)}\,\delta(\xi-\xi')\cdot\delta(\eta-\eta')\bar{a}_\varphi \quad (22)$$

Это уравнение 2-го порядка в частных производных и решение его в общем виде может быть определено, если известны граничные условия. Граничные условия для векторного потенциала в сфероидальной системе координат с учетом принятых допущений [2] и выражений (5) для коэффициентов Ламе определяются следующими выражениями [2]:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\mu_1}\,\frac{\partial(\bar{A}_1\sqrt{1+\xi^2})}{\partial\xi}&=\frac{1}{\mu_2}\cdot\frac{\partial(\bar{A}_2\sqrt{1+\xi^2})}{\partial\xi}\\ \bar{A}_1&=\bar{A}_2\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

при $\xi=\xi_2$.

где $\bar{A}_1$ — вектор-потенциал в непроводящей среде; $\bar{A}_2$ — в проводящем сфероиде; ξ_2 — координата границы раздела сред, определяющая сфероид. Таким образом, получены исходные уравнения для вектор-потенциала электромагнитного поля в сфероидальных системах координат, из решения которых определяются напряженности поля и выходные характеристики различных электромагнитных преобразователей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арфкен Г. Математические методы в физике. М., «Атомиздат», 1970.
2. Морс Г. П., Фешбах Х. Методы теоретической физики. М., ИИЛ, 1960.

И. Г. АБЛАМУНЕЦ, В. Е. ШАТЕРНИКОВ

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ВИТКА НАД ВРАЩАЮЩИМСЯ ПРОВОДЯЩИМ ШАРОМ

Вихретоковые преобразователи (ВТП) широко применяются для контроля параметров движущихся тел в условиях динамических испытаний. Для правильного выбора конструктивных размеров ВТП необходимо знать поле, создаваемое первичным преобразователем, с учетом движения контролируемого изделия.

Рассмотрим расчет электромагнитного поля витка с переменным током над вращающимся проводящим шаром. Такая задача возникает при контроле перемещений или скорости вращения сферического ротора гироскопа [1].

В этом случае в области шара справедливы уравнения Максвела для движущихся сред [2]:

$$\left|\begin{array}{l} \operatorname{rot}\vec{H} = \sigma_1(\vec{E} + [\vec{V} \times \vec{B}]) \\ \operatorname{rot}\vec{E} = -i\omega\mu_1\vec{H} \\ \operatorname{div}\vec{H} = 0 \\ \vec{V} = \vec{1}_\varphi V_\varphi = [\vec{\Omega} \times \vec{r}] \end{array}\right. \qquad (1)$$

а вне шара:

$$\left|\begin{array}{l} \operatorname{rot}\vec{H} = i\omega\varepsilon\vec{E} + \vec{j} \\ \operatorname{rot}\vec{E} = -i\omega\mu_0\vec{H} \\ \operatorname{div}\vec{H} = 0 \\ \vec{j} = 1_\varphi \cdot j_\varphi = \vec{1}_\varphi I\delta(r-a)\cdot\delta(\Theta-\Theta_0), \end{array}\right. \qquad (2)$$

где j — плотность тока витка; V_φ — линейная скорость вращения точки шара с координатами r и Θ; $\delta(r-a)$ и $\delta(\Theta-\Theta_0)$ — функции Дирака; μ_1, σ_1 — магнитная проницаемость и электропроводность материала шара; μ_0, ε — магнитная и диэлектри-