2. Юрлов Ф.Ф. Технико-экономическая эффективность сложных радиоэлектронных систем. – М.: Сов.радио, 1980. – 280 с.

3. Липаев В.В. Анализ конструктивной эффективности комплексов программ реального времени. – УСиМ, 1982, № 6, с. 47-55.

4. Липаев В.В. Конструктивные показатели качества программ и их связь с технологией проектирования. – Известия АН СССР: Техническая кибернетика, 1982, № 2, с. 151-162.

5. Кораблин М.А., Шамашов М.А. Система автоматизации проектирования и отладки математического обеспечения АСНИ. – В кн.:Сбор и отработка информации в автоматизированных системах научных исследований. Тез.докл. VIII Всес.конф. по теории кодирования и передачи информации. М.– Куйбышев: Научный совет по комплексной проблеме "Кибернетика" АН СССР, 1981, с. 126-130.

6. Коварцев А.Н., Кораблин М.А., Шамашов М.А. Имитационное моделирование систем автоматизации эксперимента с использованием эмулятора полной конфигурации. – УСиМ, 1979, № 4, с. 124-127.

7. Кораблин М.А., Шамашов М.А. Моделирование КАМАК-систем. – В кн.: Моделирование дискретных управляющих и вычислительных систем. Тез. докл. III Всес. семинара. – Свердовск: УНЦ АН СССР, 1981, с.113-115.

8. Холстед М. Начала науки о программах.–М.:Финансы и статистика, 1981. – 128 с.

УДК 681.3:629.7

Б.В.Калинин, В.А.Цыбатов

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ОПТИМИЗАЦИИ РАЗМЕЩЕНИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ

Непрерывное усложнение измерительно-вычислительных комплексов (ИВК) неизбежно ведет к увеличению удельного веса межэлементной сети связи в общем балансе материальных затрат, расходуемых на создание комплекса. Поэтому проблема пространственной организации ИВК и связанные с ней вопросы оптимального размещения его компонентов становятся все более актуальными.

Непрерывная задача о размещении элементов комплекса заключается в следующем.

Минимизировать

$$F(w_1, \dots, w_n) = \sum_{1 \le i < j \le n} s_{ij} \rho(w_i, w_j) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} c_{ik} \rho(w_i, v_k), \qquad (1)$$

здесь w_i, v_k $(i=\overline{1,n}, k=\overline{1,m})$ – векторы координат перемещаемых и фиксированных элементов соответственно, $S_{ij}\geqslant 0, C_{ik}\geqslant 0$ – коэффициенты, характеризующие сложность связи между перемещаемыми, перемещаемыми и фиксированными элементами соответственно, $\rho(w_i, w_j)$, $\rho(w_i, v_k)$ – функции, выполняющие роль оценки расстояний между элементами.

Применяемые в настоящее время методы минимизации функционала (I) существенным образом зависят от вида функции $\rho(\cdot)$, которая в общем случае определяется как

$$\rho_{ij}^{(p)}=(|x_i-x_j|^p+|y_i-y_j|^p+|z_i-z_j|^p)^{1/p},\quad p\geqslant 1, \qquad (2)$$

где x_i, y_i, z_i и x_j, y_j, z_j – координаты i-го и j-го элементов в R^3,

либо как линейная комбинация функций данного класса, например [I]:

$$\rho_{ij}^{(1-\infty)}=a_1\rho_{ij}^{(1)}+\sqrt{2}\,a_2\rho_{ij}^{(\infty)},\quad a_1, a_2\geqslant 0. \qquad (3)$$

Как правило, характерной особенностью структурной организации ИВК является ее иерархичность. Это обстоятельство предопределяет древовидность топологии [2] связи между элементами комплекса, выполняющими действия, соответствующие его назначению.

Будем называть T-задачей задачу о размещении ИВК с древовидной межэлементной сетью связи.

Разобьем множество перемещаемых элементов T - задачи на уровни $N_1, \ldots, N_M$, определив их следующим образом: пусть J^k - множество номеров перемещаемых элементов, образующих k-й уровень. Тогда

$$J^k=\Big\{i\,|\,i\in\{1,\ldots,n\}\Big\backslash\Big(\bigcup_{j=k+1}^{M}J^j\Big), \exists q\in J^{k+1}, \text{ что } S_{iq}>0\Big\},\ k=\overline{1,M-1};$$

$$J^M=\{p\},$$

где p – произвольный номер перемещаемого элемента, причем M – наименьшее целое число, при котором

$$\{1,\ldots,n\}=\bigcup_{k=1}^{M}J^k.$$

С учетом введенных множеств функционал (I) для T-задачи примет вид

$$F(w_1,\ldots w_n)=\sum_{i\in J^1}\sum_{j=1}^{m}C_{ij}\rho(w_i,v_j)+\sum_{k=2}^{M}\Big[\sum_{i\in J^k}\sum_{j\in J^{k-1}}S_{ij}\rho(w_i,w_j)+$$

$$+\sum_{i\in J^K}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\,\rho(W_i, V_j)\Big].$$

Пусть

$$F(W_{K-1}, W_K)=\sum_{i\in J^K}\sum_{j\in J^{K-1}} S_{ij}\,\rho(W_i, W_j)+\sum_{i\in J^K}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\,\rho(W_i, V_j),$$

$K=1,\overline{M}$, полагаем $F(W_0, W_1)=\sum_{i\in J^1}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\,\rho(W_i, V_j)$,

где W_K – матрица координат перемещаемых элементов K -го уровня, тогда T -задача заключается в следующем.

Минимизировать

$$F(W_1,\ldots, W_n)=\sum_{K=1}^{M} F(W_{K-1}, W_K), \tag{4}$$

что и является задачей динамического программирования.

Если $\rho(\cdot)$ – ортогональная метрика или квадрат евклидовой, то минимизация функционала (4) может быть выполнена прямым методом, основу которого составляет метод исключений. В общем случае для решения сформулированной задачи может быть применен итерационный метод [3], имеющий сходство с методом покоординатной минимизации и заключающийся в последовательном решении следующих задач:

$$\min_{W_K}\big[F(W_{K-1}, W_K)+F(W_K, W_{K+1})\big],\ K=1,\overline{M-1}, \tag{5}$$

$$\min_{W_M} F(W_{M-1}, W_M). \tag{6}$$

Поскольку

$$\min_{W_K}\big[F(W_{K-1}, W_K)+F(W_K, W_{K+1})\big]=\sum_{i\in J^{K+1}}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\,\rho(W_i, V_j)+$$

$$+\sum_{i\in J^K}\min_{W_i}\Big[\sum_{j\in J^{K-1}\cup J^{K+1}} S_{ij}\,\rho(W_i, W_j)+\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\,\rho(W_i, V_j)\Big],$$

то решение задач (5),(6) сводится к независимой оптимизации расположения перемещаемых элементов соответствующих уровней относительно элементов, с которыми они связаны.

При размещении одного элемента необходимо руководствоваться следующим правилом определения его координат: для $i \in J^K$, $K=\overline{1,M}$

$$w_i^{(q+1)} = \begin{cases} w_i^{(q)}, & \text{если } w_i^{(q)} = \arg\min\limits_{w_i}' Q_K(w_i); \\ \arg\min\limits_{w_i} Q_K(w_i), & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{7}$$

$$Q_K(w_i) = \sum_{j \in J^{K-1}} S_{ij}\rho(w_i, w_j^{(q+1)}) + \sum_{j \in J^{K+1}} S_{ij}\rho(w_i, w_j^{(q)}) + \sum_{j=1}^{m} C_{ij}\rho(w_i, v_j),$$

а $w_i^{(q)}$ – вектор координат i -го элемента на q -й итерации.

Если функция $\rho(\cdot)$ – однородная симметричная норма (функции (2), (3) таковыми являются), то выполнение правила (7) приводит к одному из двух взаимоисключающих результатов:

1. Генерируется последовательность матриц размещения перемещаемых элементов $W^{(1)}, \dots, W^{(q)}$, для которых $F(W^{(0)}) > F(W^{(1)}) > F(W^{(2)}) > \dots > F(W^{(q)}) > \dots$ ($W^{(0)}$– произвольная матрица координат начального размещения перемещаемых элементов).

2. На q -й итерации получено такое размещение $W^{(q)}$, при котором $W^{(q-1)} = W^{(q)}$.

Первый случай в силу выпуклости $F(W)=F(w_1,\dots,w_n)$ означает предельную сходимость метода:

$$\lim_{K\to\infty} W^{(K)} = \arg\min_{W} F(W); \quad \lim_{K\to\infty} F(W^{(K)}) = \min_{W} F(W).$$

Второй означает, что $W^{(q)}$ является решением T -задачи, так как полученное размещение удовлетворяет условиям теоремы.

Т е о р е м а. Пусть функция $\rho(\cdot)$ – однородная симметричная норма. $W^* = (w_1^*, \dots, w_n^*)$ доставляет минимум функционалу (I) тогда и только тогда, когда для любого $i=\overline{1,n}$

$$w_i^* = \arg\min_{w_i}\left[\sum_{j=1}^{n} S_{ij}\rho(w_i, w_j^*) + \sum_{k=1}^{m} C_{ik}\rho(w_i, v_k)\right]. \tag{8}$$

<u>Доказательство</u>. Необходимость условия (8) очевидна. Для доказательства достаточности предварительно сформулируем лемму.

Л е м м а. Пусть $t_{ik}\in[0,1]$, $k=\overline{1,m}$; $i=\overline{1,n}$ и $W^*=(w_1^*,\dots,w_n^*)$ доставляет минимум функционалу (I), тогда W^* является решением следующей задачи.

Минимизировать

$$F_t(w_1,\dots,w_n)=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} s_{ij}\rho(w_i,w_j)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} c_{ik}\rho(w_i,w_i^*+t_{ik}(v_k-w_i^*)).$$

<u>Доказательство</u>. Допустим обратное, т.е. существует такое $W^0=(w_1^0,\dots,w_n^0)$, для которого $F_t(W^0)<F_t(W^*)$.

Добавим к обеим частям неравенства неотрицательную величину, определяемую суммой следующего вида:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} c_{ik}\rho(W_i^*+t_{ik}(V_k-W_i^*),V_k),$$

и получим в развернутой форме

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} s_{ij}\rho(w_i^0,w_j^0)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} c_{ik}\left[\rho(w_i^0,w_i^*+t_{ik}(v_k-w_i^*))+\rho(w_i^*+\right.$$

$$\left.+t_{ik}(v_k-w_i^*),v_k)\right]<\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} s_{ij}\rho(w_i^*,w_j^*)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} c_{ik}\left[\rho(w_i^*,w_i^*+\right.$$

$$\left.+t_{ik}(v_k-w_i^*))+\rho(w_i^*+t_{ik}(v_k-w_i^*),v_k)\right].$$

Так как для любого $i=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,m}$

$$\rho(w_i^0,v_k)\leqslant\rho(w_i^0,w_i^*+t_{ik}(v_k-w_i^*))+\rho(w_i^*+t_{ik}(v_k-w_i^*),v_k),$$

а

$$\rho(w_i^*,v_k)=\rho(w_i^*,w_i^*+t_{ik}(v_k-w_i^*))+\rho(w_i^*+t_{ik}(v_k-w_i^*),v_k),$$

то

$$F(W^0)<F(W^*),$$

т.е. $W^*=(w_1^*,\dots,w_n^*)$ не доставляет минимум функционалу (I). Полученное противоречие доказывает справедливость леммы.

Перейдем к доказательству достаточности условия (8). Поскольку для любого $t_{ij}\in[0,1]$

$$(\rho/w_i;w_j)=\rho(w_i,w_i+t_{ij}(w_j-w_i))+\rho(w_j,w_j+(1-t_{ij})(w_i-w_j)),$$

то, положив для простоты $t_{ij}=0{,}5$; $i,j=\overline{1,n}$, представим функционая (I) в следующем виде:

$$F(w_1,\ldots,w_n)=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}S_{ij}\,\rho(w_i,0{,}5(w_i+w_j))+\sum_{k=1}^{m}c_{ik}\,\rho(w_i,v_k)\right].$$

Пусть

$$F_i(w_1,\ldots,w_n)=\sum_{j=1}^{n}S_{ij}\,\rho(w_i,0{,}5(w_i+w_j))+\sum_{k=1}^{m}c_{ik}\,\rho(w_i,v_k),$$

а $D_i(w_1,\ldots,w_n)$ - субдифференциал функции $F_i(w_1,\ldots,w_n)$, тогда, согласно выражению (8) и доказанной лемме, для любого $i=\overline{1,n}$

$$w_i^*=\arg\min_{w_i}\left[\sum_{j=1}^{n}S_{ij}\,\rho(w_i,0{,}5(w_i^*+w_j^*))+\sum_{k=1}^{m}c_{ik}\,\rho(w_i,v_k)\right]$$

и, следовательно, $0\in D_i(w_1^*,\ldots,w_n^*)$.

В силу выпуклости функции $F_i(w_1,\ldots,w_n)$

$$D(w_1,\ldots,w_n)=\sum_{i=1}^{n}D_i(w_1,\ldots,w_n)$$

($D(w_1,\ldots,w_n)$ - субдифференциал функции $F(w_1,\ldots,w_n)=\sum_{i=1}^{n}F_i(w_1,\ldots,w_n)$) и, следовательно, $0\in D(w_1^*,\ldots,w_n^*)$.

Полученное соотношение означает, что для $W^*=(w_1^*,\ldots,w_n^*)$ достаточные условия оптимальности выполняются [4]. Теорема доказана.

Доказанная теорема, помимо обоснования сходимости рассматриваемого метода решения T -задачи, позволяет сформулировать основной признак оптимального размещения произвольной сети связи: сеть связи имеет оптимальное размещение тогда и только тогда, когда любой фрагмент сети оптимально размещен относительно своего окружения.

Полученный результат составляет основу следующей методики размещения ИВК с произвольной топологией сети связи (например, ИВК с кольцевой магистралью, с многократным дублированием и т.п.):

на первом этапе сеть связи ИВК декомпозируется на фрагменты, обладающие древовидной топологией (указанную операцию, как правило, легко выполнить на основе функционального описания комплекса);

второй этап состоит из N итераций. На n -й итерации решаются T -задачи для каждого из выделенных фрагментов, причем элементы его окружения считаются фиксированными и имеют координаты, полученные к настоящему шагу. Итерация N является последней, если любой из выделенных фрагментов сети связи ИВК будет оптимально размещен относительно своего окружения.

Предлагаемый метод позволяет существенно снизить трудоемкость решения задачи оптимального размещения элементов ИВК с недревовидной топологией по сравнению с другими известными методами оптимизации.

Литература

1. Ward J.E., Wendece R.E. A new norm for measuring distance whicl yields linear location problems. – Operations Research, 1980, 28, №3, ч.2, с.836–844.

2. Гильберт Э.Н., Поллак Г.О. Минимальные деревья Штейнера. – В кн.: Кибернетический сборник. Новая серия. – М.: Мир, 1974, вып. 8, с. 19–51.

3. N.G.K.Y.K., Sacho N.G.F. Dynamic programming algorithm for optimizing distributed parameter trajectories with constraints. – Automatica, 1980, 16, №2, с. 197–203.

4. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 384 с.