

где  $(\cdot, \cdot)$  - скалярное произведение в  $L^2(\Omega)$ , т.е.

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(\mu)g(\mu)d\mu \quad \forall f, g \in L^2(\Omega);$$

$$C(f, g) = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \mu_i} f(\mu) \frac{\partial}{\partial \mu_i} g(\mu) d\mu,$$

$$\forall f, g \in H^1(\Omega), \mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3); x_0 \in L^2(\Omega), y_0 \in H_0^1(\Omega).$$

**Теорема 6.** При любом допустимом управлении  $u \in U$  поставленная задача имеет единственное решение. В работе для поставленной задачи получены необходимые условия оптимальности.

**Теорема 7.** Пусть  $u^*$  оптимальное управление поставленной задачи, тогда

$$\begin{aligned} \max_{\kappa \in [a, b]} & [(P_1(t_0, \mu_0, u^*) - P_2(t_0, \mu_0, u^*)(y(t_0, \mu_0, u^*) - x(t_0, \mu_0, u^*))\delta(\kappa) + \\ & + \delta(\kappa)y(t_0, \mu_0, u^*)P(t_0, \mu_0, u^*)] = (P_1(t_0, \mu_0, u^*) - P_2(t_0, \mu_0, \\ & u^*)(y(t_0, \mu_0, u^*) - x(t_0, \mu_0, u^*))\delta(u^*(t_0, \mu_0)) + \\ & + \delta(u^*(t_0, \mu_0))y(t_0, \mu_0; u^*)P_2(t_0, \mu_0, u^*), \end{aligned}$$

где  $P_1, P_2$  - обозначают сопряженные состояния;

$(t_0, \mu_0)$  - точка  $(0, T) \times \Omega$ .

### Л и т е р а т у р а

1. Ладженская О.А., Солонников В.А., Ральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. - М.: Наука, 1967. - 736 с.
2. Вавилин В.А., Васильев В.Б. Математическое моделирование процессов биологической очистки сточных вод активным илом. - М.: Наука, 1979. - II7 с.

УДК 62.505

В.А.Бурдастых, К.В.Исаев

ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ В АСНИ  
НА ОСНОВЕ МЕТОДА ОБОБЩЕННОЙ БАЙЕСОВСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

(г. Ростов-на-Дону)

Одна из основных особенностей сложных научных экспериментов

состоит в поэтапном последовательном во времени характере обработки экспериментальных данных. Результаты обработки представляются в отличие от "прямых" экспериментальных данных (результатов измерений) не слишком большими "обозримыми" исследователем массивами чисел, имеющими содержательный ("физический") смысл. При этом после проведения очередного этапа обработки прямые экспериментальные данные, как правило, "забываются". Последнее обстоятельство часто связано не только с их "необозримостью", но и с ограниченными возможностями применяемых носителей информации. Рассматриваемая ниже формализация задач последовательной обработки обладает, на наш взгляд, большой общностью и может служить основой для синтеза эффективных алгоритмов.

Первоначальными понятиями излагаемой теории, не определяемыми через более простые понятия, являются элементарный (неделимый) эксперимент  $\mathcal{E}$  и соответствующие ему фактор-параметр  $\omega$ , экспериментальные данные  $X$  и внутренняя переменная исследуемой системы  $\varphi$ . Элементарный эксперимент характеризуется тем, что соответствующие ему элементарные экспериментальные данные в рамках проводимого исследования не подлежат дальнейшему дроблению. В зависимости от целей исследования элементарные эксперименты могут быть определены по-разному. Например, они могут объединять все измерения, проводимые в фиксированные промежутки времени на одной экспериментальной установке, или все измерения, проводимые за один цикл исследования на разных экспериментальных установках. Фактор-параметр элементарного эксперимента объединяет совокупность всех величин, которые исследователь может изменять по своему усмотрению в некоторых пределах, и тем самым как-то влиять на экспериментальные данные. К таким величинам могут быть отнесены моменты времени измерений, управляемые (свободные) параметры измерительных трактов, положения исполнительных органов экспериментальных установок. Везде в дальнейшем экспериментальные данные  $X_i$  элементарных экспериментов  $\mathcal{E}_i$  рассматриваются как совокупности случайных величин, после проведения эксперимента  $\mathcal{E}_i$  в руки исследователя попадает реализация (выборка)  $x_i$  случайной величины  $X_i$ . Фактор-параметр  $\omega_i$  - совокупность обычных (не случайных) величин. Внутренняя переменная  $\varphi_i$  представляет собой совокупность величин, полностью характеризующих исследуемую систему при фиксированном значении фактор-параметра  $\omega_i$ , соответствующем элементарному эксперименту  $\mathcal{E}_i$ .

Составным экспериментом будем называть любую последовательность  $\mathcal{E}_N = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \dots, \mathcal{E}_N\}$  элементарных экспериментов, обычно упорядоченных в проведении их во времени (в порядке доступа исследователя к экспериментальным данным  $X_i$ ). Соответ-

вующие составному эксперименту последовательности экспериментальных данных, фактор-параметров и внутренних переменных будем обозначать  $\bar{X}_N = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ ,  $\bar{\omega}_N = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ ,  $\bar{z}_N = \{z_1, z_2, \dots, z_N\}$ . При неопределенном значении  $N$  будем писать  $\bar{x}, \bar{\omega}, \bar{z}$ .

Общей стохастической моделью системы (ОСМС) назовем последовательность условных плотностей распределения вероятностей вида

$$\{P(z_i | \bar{z}_{i-1}, \bar{\omega}_i); i=1, 2, \dots\}, \quad (1)$$

удовлетворяющих условию

$$P(z_i | \bar{z}_{i-1}, \bar{x}_{i-1}, \bar{\omega}_i) = P(z_i | \bar{z}_{i-1}, \bar{\omega}_i), i=1, 2, \dots \quad (2)$$

(независимость  $z_i$  и  $\bar{x}_{i-1}$  при условии, что заданы  $\bar{z}_{i-1}$  и  $\bar{\omega}_i$ ).

Общей моделью наблюдения назовем последовательность условных плотностей вида

$$\{P(x_i | \bar{x}_{i-1}, z_i, \bar{\omega}_i); i=1, 2, \dots\}. \quad (3)$$

Общей задачей последовательной байесовской обработки данных (ОЗБОД) будем называть задачу получения по заданным априорному распределению  $P(z_0)$ , последовательностям  $\bar{\omega}$  и  $\bar{x}$ , ОСМС и ОМН последовательности

$$\{P(\bar{z}_i | \bar{x}_i, \omega_i); i=1, 2, \dots\} \quad (4)$$

распределений  $P(\bar{z}_i | \bar{x}_i, \bar{\omega}_i)$ , вычисляемых рекуррентно по мере возрастания  $i$  и поступления экспериментальных данных  $x_i$ .

Как следует из определения ОЗБОД, ее решение задается процедурой вида

$$\{P(\bar{z}_{i-1} | \bar{x}_{i-1}, \bar{\omega}_{i-1}), \omega_i, x_i\} \rightarrow P(\bar{z}_i | \bar{x}_i, \bar{\omega}_i); i=1, 2, \dots,$$

которая определяется следующим алгоритмом, основанным на элементарных формулах теории вероятностей [1].

Общий алгоритм последовательной байесовской обработки данных (ОАЗБОД). Шаг I (шаг экстраполяции) - вычисление априорного по отношению к текущему элементарному эксперименту  $\mathcal{E}_i$  распределения совокупности внутренних переменных  $\bar{z}_i$ :

$$P(\bar{z}_i | \bar{x}_{i-1}, \bar{\omega}_i) = P(z_i | \bar{z}_{i-1}, \bar{\omega}_i) P(\bar{z}_{i-1} | \bar{x}_{i-1}, \bar{\omega}_{i-1}). \quad (5)$$

Шаг 2 (шаг уточнения  $z_i$  по данным  $x_i$  элементарного эксперимента  $\mathcal{E}_i$ ) - вычисление апостериорного по отношению к  $\mathcal{E}_i$  распределения  $\bar{z}_i$ :

$$p(\bar{z}_i | \bar{x}_i, \omega_i) = \frac{p(\bar{z}_i | \bar{x}_{i-1}, \bar{\omega}_i) p(x_i | \bar{z}_i, \bar{x}_{i-1}, \bar{\omega}_i)}{\int p(\bar{z}_i | \bar{x}_{i-1}, \bar{\omega}_i) p(x_i | \bar{z}_i; \bar{x}_{i-1}, \bar{\omega}_i) d\bar{z}_i} \quad (6)$$

В вычислениях (5) используются  $p(\bar{z}_i | \bar{z}_{i-1}, \omega_i)$  из ОСМС (1) и результаты предшествующих вычислений в виде  $p(\bar{z}_{i-1} | \bar{x}_{i-1}, \bar{\omega}_{i-1})$  (при  $i = 1$  выполнение шага 1 обеспечивается заданием априорной плотности  $p(z_0)$ ). На шаге 2 вычисления производятся по формуле Байеса (6) и обеспечиваются результатами вычислений на шаге 1 и заданной ОМН (3). Результаты  $x_i$  элементарного эксперимента  $\mathcal{E}_i$  участвуют лишь в реализации шага 2. Обратим внимание на то, что плотности (5) и (6) рассматриваются как функции  $z_i$ , а значения  $\bar{x}_i$  и  $\bar{\omega}_i$  в этих плотностях фиксированы и заданы. ОЗПВОД в общем случае связана с постепенным расширением совокупности оцениваемых величин  $\bar{z}_i = \{z_1, z_2, \dots, z_i\}$  по мере увеличения  $i$ . Это существенное неудобство устраняется, если перейти к математической модели задачи обработки данных, основанной на следующих определениях.

**Определение 1.** Марковской стохастической моделью системы или стохастической моделью состояния (СМС) будем называть ОСМС (1), удовлетворяющую помимо условий (2) также условию статистической независимости  $z_i$  и  $\{\bar{z}_{i-2}, \bar{\omega}_{i-2}\}$ , если заданы  $z_{i-1}, \omega_i, \omega_{i-1}$ :

$$p(z_i | \bar{z}_{i-1}, \omega_i, \bar{\omega}_{i-1}) = p(z_i | z_{i-1}, \omega_i, \omega_{i-1}); \quad i = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Другими словами, СМС задается последовательностью вида

$$\{p(z_i | z_{i-1}, \omega_i, \omega_{i-1}); \quad i = 1, 2, \dots\} \quad (8)$$

В случае СМС внутреннюю переменную  $z_i$  называют состоянием системы при значении  $\omega_i$  фактор-параметра.

**Определение 2.** Моделью наблюдения с независимыми наблюдениями (МНН) называется ОМН, в которой распределения, входящие в последовательность (3), удовлетворяют условию

$$p(x_i | \bar{x}_{i-1}, \bar{z}_i, \bar{\omega}_i) = p(x_i | z_i, \omega_i); \quad i = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Таким образом, МНН можно записать в виде

$$\{p(x_i | z_i, \omega_i); \quad i = 1, 2, \dots\} \quad (10)$$

Определение 3. Общей задачей последовательной байесовской фильтрации (ОЗПБФ) назовем задачу получения по заданным  $p(\gamma_0)$ ,  $\bar{\omega}$ ,  $\bar{x}$  СМС и МНН последовательности распределений

$$\{p(\gamma_i | \bar{x}_i, \bar{\omega}_i); i = 1, 2, \dots\}, \quad (II)$$

вычисляемых рекуррентно по мере возрастания  $i$  и получения доступа к экспериментальным данным  $x_i$ .

Алгоритм решения ОЗПБФ определяется следующим образом.

Общий алгоритм последовательной байесовской фильтрации (ОАПБФ).

Шаг 1 (шаг экстраполяции):

$$p(\gamma_i | \bar{x}_{i-1}, \bar{\omega}_i) = \int p(\gamma_i | \gamma_{i-1}, \omega_i, \omega_{i-1}) p(\gamma_{i-1} | \bar{x}_{i-1}, \bar{\omega}_{i-1}) d\gamma_{i-1}. \quad (I2)$$

Шаг 2 (шаг уточнения):

$$p(\gamma_i | \bar{x}_i, \bar{\omega}_i) = \frac{p(\gamma_i | \bar{x}_{i-1}, \bar{\omega}_i) p(x_i | \gamma_i, \omega_i)}{\int p(\gamma_i | \bar{x}_{i-1}, \bar{\omega}_i) p(x_i | \gamma_i, \omega_i) d\gamma_i}. \quad (I3)$$

Очень часто СМС и МНН задаются алгебраическими моделями.

Определение 4. Алгебраическая СМС (АСМС) и МНН (АМНН) соответственно последовательности соотношений вида

$$\gamma_i = f_i(\gamma_{i-1}, \omega_i, \omega_{i-1}, \xi_i); \quad i = 1, 2, \dots, \quad (I4)$$

$$x_i = h_i(\gamma_i, \omega_i, \varepsilon_i); \quad i = 1, 2, \dots, \quad (I5)$$

где  $f_i$  и  $h_i$  - заданные функции;  $\{\xi_i\}$ ,  $\{\varepsilon_i\}$  - дискретные (в общем случае векторные) независимые белые шумы, называемые соответственно шумом модели и шумом наблюдения и определяемые последовательностями плотностей  $\{p(\xi_i)\}$  и  $\{p(\varepsilon_i)\}$ .

Требования, чтобы шумы  $\{\xi_i\}$  и  $\{\varepsilon_i\}$  были белыми, являются необходимыми для того, чтобы соотношения (I4) и (I5) определяли соответственно СМС и МНН общего вида (8), (10). Эти модели могут быть получены из соотношений (I4) и (I5) путем применения правил преобразования случайных величин [1]. Заметим, что в общем случае размерности всех величин  $\gamma_i$ ,  $x_i$ ,  $\omega_i$  во всех приведенных выше определениях могут быть различными при различных  $i$ , а функции  $f_i$  и  $h_i$  могут быть заданы алгоритмически. Например, вычисление этих функций может быть связано с некоторым численным методом решения системы дифференциальных уравнений, описывающих поведение объекта исследования в условиях экспериментальной установки.

Наиболее известным примером применения конкретной реализации ОАПБФ может служить фильтр Кальмана-Бьюси /2/. В этом случае АСМС и АМН линейны по  $z_{i-1}, z_i, \xi_i, \varepsilon_i$ , а плотности  $\{p\{\xi_i\}, p\{\varepsilon_i\}\}$ -гауссовские. Обобщающими отличиями полученного при этих предположениях ОАПБФ от стандартного алгоритма Кальмана-Бьюси являются: 1) более общий векторный вид фактор-параметров  $\omega_i$  (в стандартных формах записи алгоритма Кальмана-Бьюси  $\omega_i$  - скаляр, совпадающий с текущим дискретным временем); 2) возможность при различных  $i$  рассматривать в качестве  $z_i, x_i, \omega_i$  различные совокупности величин, имеющих различные размерности и "физический" смысл. Второе из этих отличий определяет возможность объединения данных разнотипных экспериментов (проводимых на одном объекте, но, возможно, на различных экспериментных установках).

Несмотря на общность и кажущуюся простоту ОАПБФД и ОАПБФ, реальные вычисления могут оказаться очень громоздкими и даже не выполнимыми. Дело в том, что для реализации этих алгоритмов определяемая ими функциональная рекурсия должна быть заменена алгебраической рекурсией, т.е. фактически все распределения, фигурирующие в формулах (5), (6) и (12), (13), должны задаваться параметрически и в вычислениях должны участвовать лишь параметры этих распределений. Кроме этого, для однотипности всех вычислений при каждом значении  $i$  (т.е. возможности выполнения их в цикле по  $i$ ) необходимо выполнение так называемого условия параметрического самовоспроизведения формы распределений /3/, которое практически сводится к выполнению следующих двух условий:

1. Порождаемые ОАПБФ (12), (13) условные плотности  $p(z_i | \bar{x}_i, \bar{\omega}_i)$  при каждом  $i$  должны быть представимы в виде

$$p(z_i | \bar{x}_i, \bar{\omega}_i) = p(z_i | \theta_i(\bar{x}_i, \bar{\omega}_i)), \quad (16)$$

где  $\theta_i(\bar{x}_i, \bar{\omega}_i)$  - вектор-функция фиксированной не зависящей от  $i$  размерности. Вектор  $\theta_i(\bar{x}_i, \bar{\omega}_i)$  фактически является достаточной статистикой, распределение (16) сохраняется неизменным, если вектор  $\theta_i(\bar{x}_i, \bar{\omega}_i)$  не изменяется.

2. Векторы  $\theta_i(\bar{x}_i, \bar{\omega}_i)$  могут быть определены рекуррентными формулами

$$\theta_i(\bar{x}_i, \bar{\omega}_i) = \mathcal{F}(\theta_{i-1}(\bar{x}_{i-1}, \bar{\omega}_{i-1}), x_i, \omega_i), \quad (17)$$

т.е. последовательность  $\{\theta_i, i=1, 2, \dots\}$  - марковская.

Формулы вида (17) естественно назвать параметричес-

ким алгоритмом последовательной байесовской фильтрации (ПАПБФ).

К сожалению, условия самовоспроизведения для подавляющего большинства задач экспериментальной практики не выполняются. Наиболее известным примером их выполнения является упомянутый выше случай фильтра Кальмана-Бьюси. В большинстве реальных ситуаций переход от ОАПБФ к ПАПБФ может быть произведен путем замены "истинных" распределений некоторыми аппроксимирующими их параметрически заданными распределениями. Представляется разумным в качестве последних выбирать распределения, обладающие максимальной в некотором фиксированном классе, к которому принадлежат "истинные" распределения, энтропией (неопределенность). Соответствующая теория основывается на следующей теореме.

**Теорема.** Для того, чтобы в классе  $L(\Omega, \mathcal{Y}_i, \mathcal{V})$  всевозможных случайных  $n$ -мерных векторов  $\zeta$ , сосредоточенных в заданной фиксированной области  $\Omega \subset R^n$ , удовлетворяющей условию

$$E[\mathcal{Y}(h)] = \int_{\Omega} \mathcal{Y}(\zeta) \rho(\zeta) d\zeta = \mathcal{V}, \quad (18)$$

где  $E$  - символ математического ожидания,  $\mathcal{Y}_i$  и  $\mathcal{V}$  - заданные вектор-функция и вектор, некоторый вектор  $\zeta_0$  обладал максимальной энтропией  $H[\zeta] = -E[\ln \rho(\zeta)]$ , необходимо и достаточно, чтобы плотность имела экспонентный вид  $\rho(\zeta_0) = \alpha \exp[-\beta^T \mathcal{Y}(\zeta_0)]$ . (19)

Идея применения теоремы состоит в следующем. Зафиксируем некоторые  $\Omega, \mathcal{Y}_i$  и предположим, что плотность  $\rho(\zeta_{i-1}, \bar{x}_{i-1}, \bar{w}_{i-1})$  имеет вид

$$\rho(\zeta_{i-1} | \bar{x}_{i-1}, \bar{w}_{i-1}) = \alpha_{i-1}(\bar{x}_{i-1}, \bar{w}_{i-1}) \exp[-\beta_{i-1}^T(\bar{x}_{i-1}, \bar{w}_{i-1}) \mathcal{Y}(\zeta_{i-1})]. \quad (20)$$

#### Алгоритм максимально-энтропийной последовательной байесовской фильтрации (АМЭПБФ)

1. Используя формулы (12), (13), (18) и плотность (20), вычислим значение  $\mathcal{V}_i(\bar{x}_i, \bar{w}_i)$  вектора (18) для распределения  $\rho(\zeta_i | \bar{x}_i, \bar{w}_i)$ .

2. Решая при  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_i(\bar{x}_i, \bar{w}_i)$  систему уравнений, полученную путем подстановки плотности (19) в (18) и дополненную условием нормировки  $\int \rho(\zeta) d\zeta = 1$ , вычислим значения  $\alpha_i(\bar{x}_i, \bar{w}_i)$  и  $\beta_i(\bar{x}_i, \bar{w}_i)$ . В следующем по  $i$  цикле обработки экспериментальных данных  $x_{i+1}$  в качестве априорной используется плотность

$$\rho(\zeta_i | \bar{x}_i, \bar{w}_i) = \alpha(\bar{x}_i, \bar{w}_i) \exp[-\beta_i^T(\bar{x}_i, \bar{w}_i) \mathcal{Y}(\zeta_i)],$$

обладающая максимальной энтропией в классе  $L(\Omega, \mathcal{Y}_i, \mathcal{V}_i)$ .

Ясно, что так как в общем случае векторы не являются достаточными статистиками, то на каждом этапе (при каждом) обработки экспериментальных данных с помощью АМЭПБФ происходит некоторая потеря

информации, зависящая от состава и размерности вектор-функции  $Y_c$ , которую можно назвать функцией сжатия информации. Естественно, что расширение состава вектор-функции  $Y_c$  приводит к уменьшению потерь информации (точнее, количества информации Шеннона), но к увеличению вычислительных затрат на реализацию АМЭПБФ.

Наиболее универсальный способ реализации АМЭПБФ состоит в рациональном сочетании методов стохастического моделирования (Монте-Карло), стохастического программирования и стохастической аппроксимации. В некоторых случаях все вычисления могут быть выполнены аналитически. В качестве примера применения АМЭПБФ можно рассмотреть случай, когда в состав вектора вводятся все первые и вторые моменты состояния. Легко понять, что это эквивалентно стохастической линейаризации соответствующих рассматриваемой задаче АСМС (14) и АМНН (15) с последующим применением к линейаризованной модели алгоритма Кальмана-Бьюси.

В заключение отметим, что с позиций изложенной теории могут быть рассмотрены практически все задачи обработки экспериментальных данных. К таким задачам относятся, в частности, характерные задачи идентификации.

#### Л и т е р а т у р а

1. П у г а ч е в В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Наука, 1974. - 496 с.

2. Б р а м е р К., З и ф ф л и н г Г. Фильтр Кальмана-Бьюси. - М.: Наука, 1982. - 200 с.

3. П е т е р к а В. Байесовский подход к идентификации систем. - В кн.: Современные методы идентификации систем /Под ред. П.Эйкхоффа. - М.: Мир, 1983, с.278-395.

УДК 681.51.011

Ю.С.Бажанов

О ВЕРОЯТНОСТНОМ ДИАГНОСТИРОВАНИИ  
ДИСКРЕТНЫХ УСТРОЙСТВ

(г. Горький)

Задачи технического диагностирования дискретных устройств имеют большое народнохозяйственное значение. Традиционный тестовый подход: