А.Д.БОЙКОВ, Н.Д.ЕГУПОВ, Л.В.САФОНОВА

# ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ И СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Используется метод последовательных приближений для построения алгоритмов расчета выходных реакций и статистических характеристик (математических ожиданий и автокорреляционных функций) выходных сигналов нестационарных динамических систем, имеющих полиномиальные коэффициенты.

## § I. Расчет переходных процессов в динамической системе с полиномиальными коэффициентами

Рассматривается дискретная система управления, описываемая разностным уравнением вида

$$a_i(n)x(n+i)+a_{i-1}(n)x(n+i-1)+\ldots+a_0(n)x(n)= \qquad (1)$$
$$=b_r(n)y_0(n+r)+b_{r-1}(n)y_0(n+r-1)+\ldots+b_0(n)y_0(n)$$

Предположим, что коэффициенты линейного разностного уравнения (I) можно представить в виде

$$a_\ell=\sum_{k=0}^{g} A_{\ell k}\,n^k, \qquad \ell=0,1,\ldots i,$$
$$b_\ell=\sum_{k=0}^{g_1} B_{\ell k}\,n^k, \qquad \ell=0,1,\ldots r \qquad (2)$$

Учитывая формулы (2), запишем уравнение (I) в виде

$$\sum_{\ell=0}^{i} A_{\ell_0}x(n+\ell)+n\sum_{\ell=0}^{i} A_{\ell_1}x(n+\ell)+\ldots+n^g\sum_{\ell=0}^{i} A_{\ell_g}x(n+\ell)= \qquad (3)$$
$$=\sum_{\ell=0}^{r} B_{\ell_0}y_0(n+\ell)+\ldots+n^{g_1}\sum_{\ell=0}^{r} B_{\ell g_1}y_0(n+\ell).$$

Принимая во внимание теорему смещения в области оригиналов и теорему умножения на $n^k$ [2], будем иметь

$$\mathcal{D}\{n^k \sum_{\ell=0}^{l} A_{\ell k}\, x(n+\ell)\} = (-1)^k \frac{d^k}{dq^k}\Big\{X(q)\sum_{\ell=0}^{l} A_{\ell k}\, e^{q\ell}\Big\}. \qquad (4)$$

Обозначим

$$\mathcal{D}_k(q) = \sum_{\ell=0}^{l} A_{\ell k}\, e^{q\ell}, \qquad k=0,1,\ldots,g.$$

$$H_k(q) = \sum_{\ell=0}^{r} B_{\ell k}\, e^{q\ell}, \qquad k=0,1,\ldots,g_1.$$

Тогда формула (4) принимает вид

$$\mathcal{D}\{n^k \sum_{\ell=0}^{l} A_{\ell k}\, x(n+\ell)\} = (-1)^k \big[\mathcal{D}_k^{(k)}(q) X(q) +$$

$$+ C_k^1 \mathcal{D}_k^{(k-1)}(q) X'(q) + \ldots + C_k^{k-1} \mathcal{D}_k'(q) X^{(k-1)}(q) + \qquad (5)$$

$$+ \mathcal{D}_k(q) X^{(k)}(q)\big],$$

где

$$C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}$$

Применим к обеим частям уравнения (3) дискретное преобразование Лапласа. Учитывая выражение (5) и вводя обозначения

$$E_k(q) = \sum_{\ell=k}^{g} (-1)^\ell C_\ell^{(\ell-k)} \mathcal{D}_\ell^{(\ell-k)}, \qquad k=0,1,\ldots,g,$$

$$G_k(q) = \sum_{\ell=k}^{g_1} (-1)^\ell C_\ell^{(\ell-k)} H_\ell^{(\ell-k)}; \qquad k=0,1,\ldots g_1,$$

$$Y(q) = G_0(q) Y_0(q) + \ldots + G_k(q) \frac{d^k Y_0(q)}{dq^k} + \ldots +$$

$$+ G_{g_1}(q) \frac{d^{g_1} Y_0(q)}{dq^{g_1}},$$

получим

$$\sum_{i=0}^{g} E_i(q)\frac{d^i X(q)}{dq^i} = y(q).$$

Применяя к последнему уравнению метод последовательных приближений [1], [3], $X(q)$ можно представить в виде ряда

$$X(q) = X_0(q) + X_1(q) + \dots + X_k(q) + \dots ,$$

откуда

$$X(n) = x_0(n) + x_1(n) + \dots + x_k(n) + \dots \qquad (6)$$

## § 2. Расчет математического ожидания и автокорреляционной функции выходного сигнала

Определение математического ожидания сводится к решению дифференциального уравнения в комплексной области вида

$$E_0(q) M_x(q) + \dots + E_k(q)\frac{d^k M_x(q)}{dq^k} + \dots + E_g(q)\frac{d^g M_x(q)}{dq^g} = M_y(q). \qquad (7)$$

Действительно, применяя к уравнению

$$a_i(n) m_x(n+i) + a_{i-1}(n) m_x(n+i-1) + \dots + a_0(n) m_x(n) = b_r(n) m_{y_0}(n+r) + b_{r-1}(n) m_{y_0}(n+r-1) + \dots + b_0(n) m_{y_0}(n), \qquad (8)$$

изложенную в предыдущем параграфе методику, приходим к уравнению (7).

Определение корреляционной функции выходного сигнала $K_x(n,m)$ выполняется в два этапа. Вначале находится взаимная корреляционная функция $K_{xy}(n,m)$, а затем корреляционная функция $K_x(n,m)$.

Получим уравнение для определения взаимной корреляционной функции $K_{xy}(n,m)$. Вычитая из уравнения (I) уравнение (8), будем иметь уравнения для центрированных величин

$$d_i(n)\Delta^i x_0(n)+\ldots+d_0(n)\Delta x_0(n)=e_j(n)\Delta^j y_0(n)+ \\ +\ldots+e_0(n)y_0(n) \qquad (9)$$

Известно [2], что если $z_k(n)=\Delta^k x(n)$,

$$z_\ell(n)=\Delta^\ell x(n),$$

то

$$K_{z_k z_\ell}(n,m)=\Delta_n^k\Delta_m^\ell K_x(n,m). \qquad (10)$$

Умножим обе части уравнения (9) на $y_0(m)$ и определим математическое ожидание обеих частей уравнения. Учитывая (10), получим

$$d_i(n)\Delta_n^i K_{xy}(n,m)+\ldots+d_0(n)K_{xy}(n,m)= \\ =e_j(n)\Delta_n^j K_{yy}(n,m)+\ldots+e_0(n)K_{yy}(n,m). \qquad (11)$$

Рассмотрим определение корреляционной функции $K_x(n,m)$ выходного сигнала $x(n)$, когда коэффициенты уравнения (II) удовлетворяют условию

$$d_\ell(n)=\sum_{k=0}^{g}\mathcal{D}_k^\ell n^k,\quad \ell=0,1,\ldots,i, \\ e_\ell(n)=\sum_{k=0}^{g_1}E_k^\ell n^k,\quad \ell=0,1,\ldots,j. \qquad (12)$$

Учитывая условие (I2), запишем уравнение (II) в виде

$$n^g\sum_{\ell=0}^{i}\mathcal{D}_g^\ell\Delta_n^\ell K_{xy}(n,m)+\ldots+n\sum_{\ell=0}^{i}\mathcal{D}_1^\ell\Delta_n^\ell K_{xy}(n,m)+ \\ +\sum_{\ell=0}^{i}\mathcal{D}_0^\ell\Delta_n^\ell K_{xy}(n,m)=n^{g_1}\sum_{\ell=0}^{j}E_{g_1}^\ell\Delta_n^\ell K_{yy}(n,m)+ \\ +\ldots+\sum_{\ell=0}^{j}E_0^\ell\Delta_n^\ell K_{yy}(n,m). \qquad (13)$$

Применим к обеим частям уравнения (I3) $\mathcal{D}$ - преобразование по аргументу $n$. Учитывая, что

$$\mathcal{D}\left\{n^k \sum_{\ell=0}^{i} \Delta_n^\ell K_{xy}(n,m)\right\} = (-1)^k \frac{d^k}{dq^k}\left[P_k(q) K_{xy}(q,m)\right],$$

$$\mathcal{D}\left\{n^k \sum_{\ell=0}^{j} \Delta_n^\ell K_{yy}(n,m)\right\} = (-1)^k \frac{d^k}{dq^k}\left[t_k(q) K_{yy}(q,m)\right],$$

где

$$P_k(q) = \sum_{\ell=0}^{i} \mathcal{D}_k^\ell (e^q - 1)^\ell, \quad k = 0, 1, \ldots, g,$$

$$t_k(q) = \sum_{\ell=0}^{j} E_k^\ell (e^q - 1)^\ell, \quad k = 0, 1, \ldots, g_1$$

получим

$$P_g(q) \frac{d^g K_{xy}(q,m)}{dq^g} + \ldots + P_1(q) \frac{dK_{xy}(q,m)}{dq} +$$
$$+ P_0(q) K_{xy}(q,m) = T_{g_1}(q) \frac{d^{g_1} K_{yy}(q,m)}{dq^{g_1}} + \ldots + T_1(q) \frac{dK_{yy}(q,m)}{dq} +$$
$$+ T_0(q) K_{yy}(q,m). \qquad (14)$$

Причем

$$P_k(q) = \sum_{\ell=k}^{g} (-1)^\ell C_\ell^{\ell-k} \frac{d^{\ell-k} P_\ell(q)}{dq^{\ell-k}}, \quad k = 0, 1, \ldots, g,$$

$$T_k(q) = \sum_{\ell=k}^{g_1} (-1)^\ell C_\ell^{\ell-k} \frac{d^{\ell-k} t_\ell(q)}{dq^{\ell-k}}, \quad k = 0, 1, \ldots, g_1. \qquad (15)$$

Обозначим правую часть уравнения (I4)

$$T_{g_1}(q) \frac{d^{g_1} K_{yy}(q,m)}{dq^{g_1}} + \ldots + T_0(q) K_{yy}(q,m) = V(q,m).$$

Определим, далее корреляционную функцию $K_x(n,m)$

Коэффициенты уравнения, определяющего корреляционную функцию $K_x(n,m)$, удовлетворяют условию (I2). Выполнив преобразования, аналогичные рассмотренным выше, получим уравнение для изображения корреляционной функции $K_x(n,m)$

$$P_g(q)\frac{d^g K_x(q,m)}{dq^g}+\ldots+P_0(q)K_x(q,m)=$$
$$=T_{g_1}(q)\frac{d^{g_1}K_{yx}(q,m)}{dq^{g_1}}+\ldots+T_0(q)K_{yx}(q,m) \qquad (\text{I6})$$

Коэффициенты $P_k(q)$ и $T_k(q)$ определяются формулами (I5). Обозначим правую часть уравнения (I6)

$$T_{g_1}(q)\frac{d^{g_1}K_{yx}(q,m)}{dq^{g_1}}+\ldots+T_0(q)K_{yx}(q,m)=V_1(q,m).$$

Таким образом, математическое ожидание и автокорреляционная функция находятся решением следующих уравнений

$$\sum_{\nu=0}^{g}E_\nu(q)\frac{d^\nu}{dq^\nu}M_x(q)=M_y(q),$$
$$\sum_{\nu=0}^{g}P_\nu(q)\frac{d^\nu}{dq^\nu}K_{xy}(q,m)=V(q,m),$$
$$\sum_{\nu=0}^{g}P_\nu(q)\frac{d^\nu}{dq^\nu}K_x(q,m)=V_1(q,m).$$

Записанные уравнения решаются методом последовательных приближений.

## Заключение

Рассмотрена возможность применения метода последовательных приближений для детерминированного и статистического расчета дискретных динамических систем с полиномиальными коэффициентами.

## Литература

I. Солодовников В.В. (ред.), Техническая кибернетика, кн.3, ч. I, М., Машиностроение, 1969.

2. Кузин Л.Т. Расчет и проектирование дискретных систем управления, М., Машгиз, 1962.

3. Солодов А.В. Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами, М., Физматгиз, 1962.

А.Д.БОЙКОВ, Н.Д.ЕГУПОВ, С.Ф.ЛЕДЯЕВ

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СВЕРТКИ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ РАСЧЕТА АВТОКОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА

Рассматривается динамическая система, поведение которой можно описать дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами вида

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t)\frac{d^i x}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j(t)\frac{d^j f}{dt^j}, \qquad (1)$$

$$a_i(t) = a_i^0 + \alpha_i(t)$$

$$a_n(t) = a_n = const \neq 0 \qquad (2)$$

$$b_j(t) = b_j^0 + \beta_j(t)$$

где $f(t)$ и $x(t)$ – соответственно входной и выходной сигналы; $b_j^0$, $a_i^0$ – постоянные коэффициенты; $\alpha_i(t)$, $\beta_j(t)$ – детерминированные функции аргумента $t$.

С учетом предположений о коэффициентах $\{a_i(t)\}$ и $\{b_j(t)\}$, исходное дифференциальное уравнение можно представить так

$$\sum_{i=0}^{n} a_i^0\frac{d^i x}{dt^i} + \sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i(t)\frac{d^i x}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j^0\frac{d^j f}{dt^j} + \qquad (3)$$

$$+ \sum \beta_j(t)\frac{d^j f}{dt^j}.$$