

четные схемы приведены на рис. 2,3. При расчете были использованы экспериментально определенные значения гидравлической жесткости датчика $K_{гг} = \frac{\rho c_{дл}}{\gamma}$ и коэффициента сопротивления демпфера K . Амплитудно-частотные характеристики датчика давления и подводящего трубопровода по отношению к полезному НЧ сигналу без наложенных и с наложенными ВЧ помехами представлены на рис. 2,3. Из графиков видно, что наличие помех в виде наложенных ВЧ пульсаций давления на входе в гидравлическую магистраль системы измерения давления может привести к существенному изменению его амплитудно-частотной характеристики.

Литература

1. Шорин В.П. О периодическом течении жидкости через диафрагмы. Изв. Вуз "Авиационная техника", № 4, 1970.
2. Попов Е.П., Пальтв И.П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. М., Физматгиз, 1960.

В.А.ВЫЖАНИН, А.А.СОЛОВЬЕВ

К ВЫВОДУ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА С УПРУГИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

В работе рассматривается вывод общих уравнений движения механической системы, состоящей из абсолютно твердого тела и упругих элементов, закрепленных на твердом теле таким образом, что они могут совершать малые упругие колебания относительно своих положений равновесия. Под упругими элементами системы принимаются изотропные тела, деформации которых удовлетворяют закону Гука [1]. Для вывода уравнений движения рассматриваемой системы используется вариационный принцип в форме Гамильтона-Остроградского. Это позволит получить необходимые и достаточные граничные условия и достигнуть известной краткости уравнений движения [2]. В дальнейшем ограничимся рассмотрением системы с одним упругим элементом, т.к. наличие в системе нескольких элементов приводит лишь к суммированию величин, относящихся к ним, в уравнениях движения.

Обозначив через T и V кинетическую и потенциальную энергии системы, вычислим вариацию интеграла $\int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt$, который берется между двумя фиксированными моментами времени t_1 и t_2 . Обозначив через δA работу, совершаемую приложенными к системе внешними силами на возможных перемещениях, согласно вариационного принципа можно записать [1, 2]

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta A = 0. \quad (1)$$

Введем следующие обозначения: а) систему с недеформированным элементом будем называть недеформированной системой и все величины, относящиеся к ней, будем отмечать значком (\cdot); б) систему с деформированным элементом будем называть деформированной системой; в) величины, относящиеся к твердому телу, будем отмечать значком (\cdot).

Пусть ρ - постоянная плотность упругого элемента; \mathcal{V} - область занятая им в данный момент времени; S - граница области \mathcal{V} . Тогда, обозначив поверхность контакта упругого элемента тела через S_k и свободную поверхность границы S_f запишем

$$S = S_k + S_f. \quad (2)$$

Введем инерциальную систему координат Ox_1, x_2, x_3 , орты направлений осей которой обозначим $\bar{e}_s (s=1, 2, 3)$, а также связанную с твердым телом систему $\bar{e}_s (s=1, 2, 3)$ с началом в некоторой точке O тела; единичные оси подвижных осей обозначим через $\bar{e}'_s (s=1, 2, 3)$.

Тогда радиус-вектор точки системы относительно точки O' можно представить:

$$\bar{r}'_0 = \bar{r}_0 + \bar{r}_\nu, \quad (3)$$

где $\bar{r}'_0 = \sum_{s=1}^3 x'_{0s} \bar{e}'_s$ - радиус-вектор точки относительно O' ,
 $\bar{r}_\nu = \sum_{s=1}^3 x_{\nu s} \bar{e}_s$ - радиус-вектор рассматриваемой точки системы относительно O .

Следовательно, положение твердого тела в пространстве $Ox_1/x_2/x_3$ можно задать вектором \bar{r}'_0 и косинусами $\mu_{j\alpha}$ углов между подвиж-

ными и неподвижными осями, т.е. $f_{s2} = \vec{L}'_s \cdot \vec{L}_2$ ($2, s = 1, 2, 3$).

Вектор абсолютной скорости точки системы представим

$$\vec{V}_0 + \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_V + \vec{u}, \quad (4)$$

где \vec{v}_0 - вектор скорости точки O , $\vec{\omega}$ - вектор мгновенной угловой скорости тела; \vec{u} - вектор относительной скорости.

По определению, для точек твердого тела $\vec{r}_V = \vec{r}_V^0$, а для точек упругого элемента

$$\vec{r}_V = \vec{r}_V^0 + \vec{y}, \quad (5)$$

где \vec{y} - вектор упругого перемещения точки упругого элемента.

Поэтому для точек твердого тела $\vec{u} = 0$, а упругого элемента

$$\vec{u} = \frac{d\vec{y}}{dt}. \quad (6)$$

Переход от мгновенного положения рассматриваемой системы в действительном движении к одновременному ее положению в сравниваемом движении можно осуществить, сообщая всей системе, как твердому телу, бесконечно малые поступательное $\delta\vec{y}$ и $\delta\vec{\theta}$ вращательное перемещения и относительные перемещения $\delta\vec{y}$ ($\delta y_1, \delta y_2, \delta y_3$) точкам упругого элемента. Заметим, что возникающие при этом деформации

ϵ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) должны удовлетворять уравнению совместности Сен-Венана [3].

Обозначив через $\vec{V}_0 + \delta\vec{V}_0$ и $\vec{\omega} + \delta\vec{\omega}$ векторы мгновенных поступательной и угловой скоростей твердого тела в сравниваемом движении, вариации $\delta\vec{V}_0$ и $\delta\vec{\omega}$ через $\delta\vec{e}$ и $\delta\vec{\theta}$ можно представить [2]:

$$\delta\vec{V}_0 = \delta\vec{\theta} \times \vec{r}_0 + \vec{r}_0 \times \delta\vec{\theta} + d\delta\vec{e}/dt, \quad (7)$$

$$\delta\vec{\omega} = \vec{\omega} \times \delta\vec{\theta} + d\delta\vec{\theta}/dt.$$

Также справедливо равенство:

$$\delta \bar{z}_0' = \delta \bar{z} + \delta' \bar{z} + \delta \bar{v} + \delta \bar{q} \quad (8)$$

Далее перейдем к построению вариации для T', V, A .
В силу формулы (4) кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{1}{2} M \bar{v}_0^2 + M \bar{v}_0 (\bar{\omega} \times \bar{z}_c) + \frac{1}{2} \bar{\omega} \theta \bar{\omega} + \\ + \bar{v}_0 \rho \int_V \bar{u} dV + \bar{\omega} \rho \int_V \bar{z}_V \bar{u} dV + \frac{1}{2} \rho \int_V \bar{u}^2 dV, \quad (9)$$

где M - масса всей системы; $\bar{z}_c = (M \bar{z}_T + \int_V \bar{z}_V dV) / M$ - радиус-вектор относительно точки O центра масс системы;

$$\theta = \theta_T + \rho \int_V (E \bar{z}_V \bar{z}_V - \bar{z}_V^2) dV$$

- тензор инерции системы относительно точки O .

Введем в рассмотрение вектор количества движения системы

$$Q = M(\bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{z}_c) + \rho \int_V \bar{u} dV \quad (10)$$

и вектор момента количества движения системы

$$C_i = \bar{z}_c \times M \bar{v}_0 + \theta \bar{\omega} + \rho \int_V (\bar{z}_V \times \bar{u}) dV. \quad (11)$$

Можно показать, что

$$\bar{Q} = \text{grad}_{\bar{v}_0} T, \quad \bar{C}_i = \text{grad}_{\bar{\omega}} T. \quad (12)$$

Тогда вариацию кинетической энергии можно записать

$$\delta T = \bar{Q} \delta \bar{v}_0 + \bar{C}_i \delta \bar{\omega} + \rho \int_V [\bar{z}_V \delta \bar{u} + (\bar{z}_V \times \bar{u}) \delta \bar{q}] dV$$

или, заменив векторы $\delta \vec{v}_0$, $\delta \vec{\omega}$ их выражениями, получим

$$\delta T = \bar{Q} \left[\frac{d \delta \vec{e}}{dt} + \vec{\omega} \times \delta \vec{e} + \vec{v}_0 \times \delta \vec{\theta} \right] + \bar{C}_1 \left[\frac{d \delta \vec{\theta}}{dt} + \vec{\omega} \times \delta \vec{\theta} \right] + \rho \int_V [\vec{v} \delta U + (\vec{v}_0 + \vec{\omega}) \delta y] d\tau. \quad (13)$$

Потенциальную энергию системы V примем равной потенциальной энергии деформации упругого элемента. Пусть Φ - удельная потенциальная энергия деформации, зависящая только от компонентов деформации ϵ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) т.е. $\Phi = \Phi(\epsilon_{ij})$. Заметим, что

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} + \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right). \quad (14)$$

Полная потенциальная энергия упругого элемента

$$V = \int_V \Phi d\tau. \quad (15)$$

а ее вариация

$$\begin{aligned} \delta V &= \int_V \delta \Phi d\tau = \int_V \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{ij}} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_j} d\tau = \\ &= \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{ij}} \delta y_i \right) d\tau - \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{ij}} \right) \delta \epsilon_{ij} d\tau, \end{aligned}$$

где введено обозначение $V_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{ij}}$.

Согласно формуле Гаусса-Остроградского

$$\int_V \frac{\partial R_j}{\partial x_j} d\tau = \int_S R_j n_j dS,$$

где n_j ($j = 1, 2, 3$) - компоненты единичного вектора внешней нормали \vec{n} к S ; известные условия, налагаемые на компоненты R_j и поверхности S в данном случае выполняются.

Следовательно, $\delta V = \int_V \sigma_{ij} \delta n_j ds - \int_V \rho \delta u_i dx_i$

где $\sigma_{ij} = \partial \sigma_{ij} / \partial x_j$ - компоненты тензора напряжений σ .

Заметим, что в используемой линейной теории [3]:

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (16)$$

где λ_{ijkl} - тензор упругих постоянных, симметричный относительно перестановок i и j , k и l и их пар.

Для изотропного тела тензор λ_{ijkl} через постоянные Ламе λ и μ определяется по формуле

$$\lambda_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu \delta_{ik} \delta_{jl}, \quad (17)$$

где δ_{ij} - символ Кронекера.

Подставим (16), (17) в выражение δV и, проведя некоторые преобразования, получим

$$\delta V = \int_V \rho \delta u_i dx_i + \int_V \mu \text{grad } \text{div } \delta u - \int_V (\lambda + \mu) \text{grad } \text{div } \delta u - \int_V \mu \text{grad } \text{div } \delta u \quad (18)$$

Примем, что к телу приложены внешние силы f_i , которые на возможных перемещениях δu_i совершают работу $\delta W = \int_V f_i \delta u_i dx_i$. Среди сил, действующих на упругий элемент, будем различать силы массовые и действующие на каждый элемент ρdV и силы поверхностные, действующие на элемент dS_n . Обозначив вектор массовой силы, отнесенный к единице массы через f_i , а вектор поверхностной силы, отнесенный к единице поверхности - t_i , согласно (8) запишем

$$\delta A = \int_V f_i \delta u_i dx_i + \int_V t_i \delta u_i dS_n$$

где K и L - главный вектор и главный момент относительно точки O всех приложенных к системе активных сил;

Подставим в (I) выражения $\delta T, \delta V, \delta A$ и проинтегрируем по частям члены $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{c}_i}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{c}_j}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{c}_k} \right) \cdot \dot{V} \delta y$. В силу независимости и произвольности $\delta \vec{r}, \delta \vec{\omega}, \delta y$ и т.к. при $t = t_1, \delta \vec{r} = \delta \vec{\omega} = \delta y = 0$, получим следующие уравнения движения рассматриваемой системы:

$$\frac{d\vec{U}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{U} = \vec{K}, \quad (19)$$

$$\frac{d\vec{C}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{C} + \vec{h} \times \vec{U} = \vec{Z}, \quad (20)$$

$$\frac{d\vec{E}}{dt} + \omega \vec{r} = f + (\lambda + \mu) \text{grad} \vec{y} + \mu \text{div grad} \vec{y}, \quad (21)$$

к которым необходимо добавить граничные условия

$$-(\lambda + \mu) \text{div} \vec{y} + \mu \text{grad} \vec{y} = \vec{f}_s \quad (22)$$

На свободной поверхности S_y и $\vec{y} = 0$
на S_k в случае жесткой заделки элемента в твердое тело.

Таким образом, система уравнений движения твердого тела с упругим элементом представляет собой совместную систему обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Решение этой системы будут содержать произвольные функции и постоянные, которые необходимо подчинить определенным граничным и начальным условиям. Начальные условия заключаются в том, что задаются положения и скорости \vec{r}_i и $\vec{\omega}$ твердого тела и деформации и скорости \vec{u} точек элемента при $t = 0$.

Выше при выводе уравнений движения твердое тело и упругий элемент рассматривались как одна система, благодаря чему при выводе уравнений движения не было необходимости вычислять силы взаимодействия между ними. Главный вектор \vec{P} и главный момент \vec{N} этих сил представляются теми членами в уравнениях (19) - (21), которые относятся к упругому элементу, т.к. соответствующие уравнения для одного твердого тела можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{U}_r}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{U}_r &= \vec{K}_r + \vec{P}, \\ \frac{d\vec{C}_r}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{C}_r + \vec{h} \times \vec{U}_r &= \vec{Z}_r + \vec{N}, \end{aligned} \quad (23)$$

где \vec{K}_r и \vec{L}_r главный вектор и главный момент относительно точки O внешних сил, приложенных к твердому телу.

По определению [3]

$$\vec{P} = \int_{S_x} \vec{T}_n dS_x, \quad \vec{L} = \int_{S_x} (\vec{r} \times \vec{T}_n) dS_x \quad (24)$$

где \vec{T}_n - напряжение по нормали к поверхности S_x .
Уравнение движения упругого элемента можно записать так:

$$\rho \vec{a} = \vec{F} + \vec{P} - \vec{L}$$

где $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ - составляющие \vec{a} в направлении оси X_2 . Следовательно, используя формулу Гаусса-Остроградского

$$\int_{V} \text{div} \vec{F} dV = \int_{S} \vec{F} \cdot \vec{n} dS,$$

уравнения (24) можно записать в виде:

$$\rho \int_{V} \vec{a} dV = \int_{V} \vec{F} dV + \int_{S} \vec{P} dS - \int_{S} \vec{L} dS$$

где $\int_{V} \vec{a} dV = \dot{\vec{Q}}$ - количество движения, $\int_{S} \vec{P} dS = \dot{\vec{C}}$ - момент количества движения упругого элемента.

Таким образом, уравнения (23) можно рассматривать как другую форму уравнения движения твердого тела с упругим элементом. К ним необходимо добавить уравнение (21) с соответствующими граничными условиями.

Вместо движения системы рассматривалось по отношению к инерциальной системе. Далее коротко рассмотрим движение системы по отношению к их общему центру масс. Вектор скорости \vec{v}_c центра масс системы определяется интегрированием уравнения (19), которое с учетом (16) можно записать в виде:

$$\rho \vec{v}_c = \vec{F} + \vec{P} - \vec{L}$$

Вектор-радиус какой-либо точки системы относительно центра масс обозначим через \overline{r}_V . Следовательно, $\sum_V m_V \overline{r}_V = 0$, т.е. статический момент системы относительно центра масс равен нулю. Также количество относительного движения системы

$$\overline{Q}' = \sum_V m_V \overline{v}_V = 0.$$

Скорость какой-либо точки в ее относительном движении

$$\overline{v}_V' = \overline{v}_0' + \overline{\omega} \times \overline{r}_V + \overline{u},$$

где \overline{v}_0' - относительная скорость точки O твердого тела.

Вектор количества относительного движения и момента количеств относительного движения представляются в виде

$$\overline{Q}' = M(\overline{v}_0' + \overline{\omega} \times \overline{r}_c) + \rho \int_{\Sigma} \overline{u} d\tau = 0, \quad (25)$$

$$\overline{C}' = M \overline{r}_c \times \overline{v}_0' + \theta \cdot \overline{\omega} + \rho \int_{\Sigma} (\overline{r}_V \times \overline{u}) d\tau.$$

Следовательно, \overline{v}_0' , $\overline{\omega}$, \overline{u} не являются независимыми, а связаны первым из этих равенств. Для вектора \overline{C}' справедливо [2]:

$$\overline{C} = \overline{C}' + \overline{r}_c \times \overline{Q},$$

представив которое в уравнение (20), получим

$$\frac{d\overline{C}'}{dt} + \overline{\omega} \times \overline{C}' = \overline{L}', \quad (26)$$

где $\overline{L}' = \sum_V \overline{r}_V \times \overline{F}_V$ - главный вектор активных сил относительно центра масс.

К уравнению (26) необходимо добавить уравнение (21) с соответствующими граничными условиями. Т.к. $\overline{V} = \overline{V}_c + \overline{V}'$, то уравнение (21) в подвижных осях имеет вид

$$\frac{d\vec{f}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}' = \vec{f}' + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{y}' + \mu \text{div grad } \vec{y}', \quad (27)$$

где

$$\vec{f}' = \vec{f} + \rho \left(\frac{d\vec{v}_e}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}_e \right). \quad (28)$$

Пример. Рассмотрим движение системы, состоящей из твердого тела в форме цилиндра и жестко заделанных в него двух пластин прямоугольной формы (рис. I). За оси подвижной системы примем главные оси недеформированной системы. Пластины, для которых выполняются

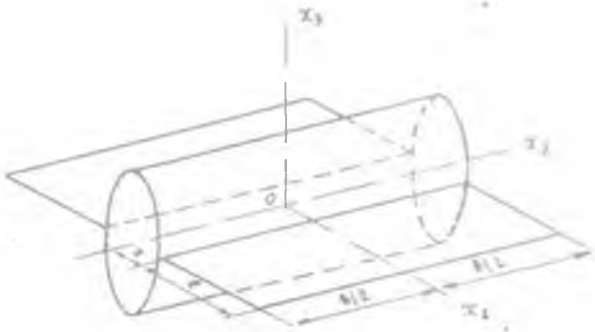


Рис. I.

основные гипотезы тонких пластин [4], совершают малые колебания относительно своих положений равновесия, совпадающих с плоскостью Ox_1, x_2 . Ограничимся рассмотрением вращения системы относительно оси x_3 с угловой скоростью ω_3 , т.е.

$$\vec{v}_{10} = \vec{v}_{20} = \vec{v}_{30} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3$$

Для точек пластин $b_1 = u_2 y_3, b_2 = 0, b_3 = -x, \omega_2 = u_1$. Составляющие момента количества движения системы

$$\begin{aligned} \bar{C}_1 &= \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x_2 u_2 dx_1 dx_2 dx_3 + \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x_2 u_1 dx_1 dx_2 dx_3 \\ \bar{C}_2 &= \theta_2 \dot{\omega}_2 \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x_1 u_3 dx_1 dx_2 dx_3 + \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x_1 u_1 dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned} \quad (29)$$

Подставим выражения (29) в уравнения (26) и (27) и пренебрегая членами второго порядка малости, получим систему

$$\theta_2 \dot{\omega}_2 - \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x_1 \dot{u}_3 dx_1 dx_2 dx_3 - \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x_1 \dot{u}_1 dx_1 dx_2 dx_3 = \dot{L}_2, \quad (30)$$

$$\rho (x \dot{u}_2 + \dot{u}_3) = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)} \left(\frac{\partial^4 y_3}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 y_3}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 y_3}{\partial x_2^4} \right)$$

и граничные условия:

$$y_3 = 0, \quad \frac{\partial y_3}{\partial x_1} = 0, \quad \text{при } x_1 = \pm r,$$

$$\frac{\partial^2 y_3}{\partial x_1^2} + \kappa \frac{\partial^2 y_3}{\partial x_2^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 y_3}{\partial x_1^2} + (2-\kappa) \frac{\partial^2 y_3}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad (31)$$

$$x_1 = \pm (r + e), \quad x_2 = \pm \frac{b}{2}.$$

В (30) и (31) введены обозначения:

\mathcal{L}_2 - момент внешних сил относительно оси x_2 ;

e - модуль упругости;

κ - коэффициент Пуассона;

h - постоянная толщина пластин.

Остальные обозначения приведены на рисунке.

Литература

1. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ, м.Л., 1935.
2. Лурье А.И. Аналитическая механика. Физмат, М., 1961.
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды, т.1, II. Наука, 1970.
4. Бабаков И.М. Теория колебаний. Наука, М., 1965.