9. Szablewski W., Eine neue Konzeption für die Berechnung incompressible turbulenter Grenzschichten,

(Шаблевский В. Новая модель для расчета несжимаемых турбулентных пограничных слоев), МЖГ, 1970, № 2, 121-135.

10 Kinney R.B., Sparrow E.M., Turbulent flow, heat transfer, and mass transfer in a tube with surface suction. Trans ASME, 1970 C92, N2, русский перевод: Кинни, Спэрроу. Турбулентное течение, тепло- и массообмен в трубах с поверхностным отсосом, Теплопередача, 1970, № 2, 121-131.

11 Cebeci T. Behavior of turbulent flow near a porous wall with pressure gradient, AIAA Journal, 1970 8, N12, 2152-2156, русский перевод: Себеси. Турбулентное течение у пористой стенки при наличии градиента давления, Ракетная техника и космонавтика, 1970, № 12, 48-53.

12. Гинзбург И.П. Теория сопротивления и теплопередача, Изд-во Ленинград. ун-та, 1970.

13. Брановер Г.Г. Турбулентные МГД-течения в трубах, Рига, Зинатне, 1967.

В.К.СКИРМУНТ

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРОФИЛЯ СКОРОСТИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ПО ЗАМЕРЕННОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ДАВЛЕНИЯ И НАПРЯЖЕНИЯ ТРЕНИЯ ПО ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛА

Стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости около плоского твердого тела в общем случае описывается системой уравнений Навье-Стокса

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \qquad (1)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \qquad (2)$$

и уравнением неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (3)$$

при граничных условиях

$$y=0: \quad u=0, \; v=0, \tag{4}$$

$$y=\infty: \quad u=U_\infty . \tag{5}$$

Система уравнений (I-5) дает возможность выразить производную любого порядка для составляющих скорости u , v и давления p через производные более низкого порядка. Начиная с n = 2 формулы для определения производных для u и v можно представить в виде

$$u_{ny} = -\frac{\rho}{\mu}\Big[(u v_{(n-1)y} - v u_{(n-1)y}) + \frac{n-2}{1!}\Big(1-\frac{1}{n-2}\Big)(u_y v_{(n-2)y} - v_y u_{(n-2)y}) + \frac{(n-2)(n-3)}{2!}\Big(1-\frac{2}{n-3}\Big)(u_{2y} v_{(n-3)y} - v_{2y} u_{(n-3)y}) + \ldots\Big] + \frac{1}{\mu} p_{x,(n-2)y} + v_{x,(n-1)y},$$

$$v_{ny} = -\frac{\rho}{\mu}\Big[(u v_{x,(n-2)y} - v u_{x,(n-2)y}) + \frac{n-2}{1!}(u_y v_{x,(n-3)y} - v_y u_{x,(n-3)y}) + \frac{(n-2)(n-3)}{2!}(u_{2y} v_{x,(n-4)y} - v_{2y} u_{x,(n-4)y}) + \ldots\Big] + \frac{1}{\mu} p_{(n-1)y} - v_{2x,(n-2)y},$$

где n - порядок производной; x, y - индексы, указывающие переменную, по которой ведется дифференцирование.

Используя уравнение неразрывности (3), граничные условия (4-5), соотношения

$$\tau|_{y=0} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}, \quad \tau|_{y=\delta} = 0$$

полагая y = 0, получим значения производных u_{ny}, v_{ny}, p_{ny} на стенке.

Ограничимся производными до четвертого порядка включительно

$$y = 0: \quad u = 0, \quad u_y = \frac{1}{\mu}\tau, \quad u_{2y} = \frac{1}{\mu} p_x,$$
$$u_{3y} = \frac{2}{\mu}\tau_{2x}, \quad u_{4y} = \frac{\rho}{\mu^2}\tau\tau_x - \frac{2}{\mu} p_{3x} \qquad (6)$$

$$v = 0, \quad v_y = 0, \quad v_{2y} = -\frac{1}{\mu}\tau_x,$$
$$v_{3y} = -\frac{1}{\mu} p_{2x}, \quad v_{4y} = \frac{2}{\mu}\tau_{3x}. \qquad (7)$$

$$p_y = -\tau_x, \quad p_{2y} = -p_{2x}, \quad p_{3y} = \tau_{3x}, \qquad (8)$$
$$p_{4y} = p_{4x} + \frac{2\rho}{\mu^2}\left(\tau\tau_{2x} - \tau_x^2\right).$$

Анализ формул (6–8) показывает, что производные любого порядка от u , v и p могут быть рассчитаны по известному распределению напряжения трения и давления на поверхности тела. Дальнейшее изложение будем вести применительно к продольной составляющей скорости u , так как в рамках пограничного слоя распределение v и p не представляет практического интереса. Заменим искомое распределение скорости в пограничном слое функцией, у которой производные при $y = 0$ и $y = \delta$ имеют те же значения. Введем безразмерное расстояние от стенки $\bar{y} = y/\delta$ и примем зависимость скорости u от $\bar{y}$ в виде полинома целой положительной степени

$$u = \sum_{i=0}^{2n+1} K_i \bar{y}^i. \qquad (9)$$

Условие плавного сопряжения профиля на границе пограничного слоя с внешним потоком имеет вид

$$u_{ny}|_{y=\delta} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (10)$$

Дифференцируя (9) и приравнивая соответствующие значения производных при $\bar{y} = 0$ и $\bar{y} = 1$, получим систему уравнений относительно K_i :

$$K_0 = 0, \quad K_1 = u_{\bar{y}}(0), \quad 2K_2 = u_{2\bar{y}}(0), \quad 6K_3 = u_{3\bar{y}}(0), \quad n!K_n = u_{n\bar{y}}(0),$$

$$U_\infty = \sum_{i=0}^{2n+1} K_i, \quad u_{\bar{y}}(1) = \sum_{i=1}^{2n+1} iK_i, \quad u_{2\bar{y}}(1) = \sum_{i=2}^{2n+1} i(i-1)K_i,$$

$$u_{3\bar{y}}(1) = \sum_{i=3}^{2n+1} i(i-1)(i-2)K_i, \quad u_{n\bar{y}}(1) = \sum_{i=n}^{2n+1} i(i-1)(i-2)\ldots(i-n+1)K_i.$$

Выпишем в окончательном виде выражения для u , согласно [I], с точностью до производных первого порядка

$$u = u_{\bar{y}}(0)\bar{y} + K_2\bar{y}^2 + K_3\bar{y}^3, \qquad (11)$$

где

$$K_2 = 3U_\infty - 2u_{\bar{y}}(0),$$

$$K_3 = -2U_\infty + u_{\bar{y}}(0),$$

с точностью до производных второго порядка

$$u = u_{\bar{y}}(0)\bar{y} + 0{,}5\,u_{2\bar{y}}(0)\bar{y}^2 + K_3\bar{y}^3 + K_4\bar{y}^4 + K_5\bar{y}^5, \qquad (12)$$

где

$$K_3 = 10U_\infty - 6u_{\bar{y}}(0) - 1{,}5\,u_{2\bar{y}}(0),$$

$$K_4 = -15U_\infty + 8u_{\bar{y}}(0) + 1{,}5\,u_{2\bar{y}}(0),$$

$$K_5 = 6U_\infty - 3u_{\bar{y}}(0) - 0{,}5\,u_{2\bar{y}}(0),$$

с точностью до производных третьего порядка

$$u = u_{\bar{y}}(0)\bar{y} + 0{,}5u_{2\bar{y}}(0)\bar{y}^2 + \frac{1}{6}u_{3\bar{y}}(0)\bar{y}^3 + \qquad (13)$$
$$+ K_4\bar{y}^4 + K_5\bar{y}^5 + K_6\bar{y}^6 + K_7\bar{y}^7,$$

где

$$K_4 = 35U_\infty - 20u_{\bar{y}}(0) - 5u_{2\bar{y}}(0) - \frac{2}{3}u_{3\bar{y}}(0),$$

$$K_5 = -84U_\infty + 45u_{\bar{y}}(0) + 10u_{2\bar{y}}(0) + u_{3\bar{y}}(0),$$

$$K_6 \; 70U_\infty - 36u_{\bar{y}}(0) - 7{,}5u_{2\bar{y}}(0) - \frac{2}{3}u_{3\bar{y}}(0),$$

$$K_7 = -20U_\infty + 10u_{\bar{y}}(0) + 2u_{2\bar{y}}(0) + \frac{1}{6}u_{3\bar{y}}(0).$$

Расчет профиля скорости по формулам (II-I3) возможен после определения зависимости толщины пограничного слоя от продольной координаты. Для этого необходимо дважды продифференцировать (II), положить $\bar{y}$ = 0 и приравнять полученное выражение значению $u_{2\bar{y}}(0)$; затем положить $\bar{y}$ = I и приравнять полученное выражение $u_{2\bar{y}}(1)$. Решая два уравнения, определим две зависимости $\delta = \delta(\bar{x})$. Они будут отличаться лишь численными значениями коэффициентов. Выбирая результирующее значение коэффициента, равное среднему арифметическому, получим зависимость $\delta_1 = \delta_1(\bar{x})$ в первом приближении. Определение $\delta = \delta(\bar{x})$ во втором и третьем приближениях производится с помощью формул (I2,I3) таким же путем. Процесс определения δ заканчивается, если последующие приближения не отличаются друг от друга в пределах заданной точности.

Одним из направлений, использования описанного метода является восстановление профиля скорости в пограничном слое по известному распределению давления и напряжения трения вдоль поверхности обтекаемого тела. Возможность такого подхода проиллюстрируем двумя примерами.

I. Рассмотрим обтекание плоской пластины несжимаемым потоком жидкости. Положим, что из "эксперимента" известно напряжение трения на поверхности пластины. Поставим целью найти распределение продольной составляющей вектора скорости в пограничном слое. В качестве "экспериментального" напряжения трения используем его значение, определенное из решения задачи Блазиуса. Это дает возможность сравнить профили скорости, рассчитанные по предлагаемому методу с точным режением. Значения производных на стенке определяется по выражениям (6), если положить $P_x = 0$. Напряжение трения представим в виде

$$\tau = \frac{\rho U_\infty^2}{\sqrt{Re_L}} f(\bar{x}), \tag{I4}$$

где $Re_L = \frac{\rho U_\infty L}{\mu}$ - число Рейнольдса; L - характерный размер; $f(\bar{x}) = \frac{\alpha}{\sqrt{\bar{x}}}$ для пластины; $\alpha = 0{,}33206$; $\bar{x} = \frac{x}{L}$ - безразмерная координата.

Зависимость $\delta = \delta(\bar{x})$ может быть принята в форме

$$\delta = \frac{L}{\sqrt{Re_L}} T(\bar{x}). \tag{I5}$$

Подставляя (I4) и (I5) в (6), получим

$$\begin{aligned} U_{\bar{y}} &= U_\infty f(\bar{x}) T(\bar{x}), \\ U_{2\bar{y}} &= 0, \\ U_{3\bar{y}} &= -\frac{2U_\infty f''(\bar{x})}{Re_L} T^3(\bar{x}), \\ U_{4\bar{y}} &= U_\infty f(\bar{x}) f'(\bar{x}) T^4(\bar{x}). \end{aligned} \tag{I6}$$

При больших числах Re_L величина $U_{3\bar{y}} = 0$. Дифференцируя (II) дважды и воспользовавшись условиями (I6) и (I0), получим два соотношения для определения $T(\bar{x})$, из которых

$$T(\bar{x}) = \frac{3}{2f(\bar{x})} \quad ; \quad T(\bar{x}) = \frac{3}{f(\bar{x})}$$

Положим $T_1(\bar{x}) = 9/4\, f(\bar{x})$. Аналогично из формул (I2) и (I3) получим

$$T_2(\bar{x}) = \frac{25}{12 f(\bar{x})}, \quad T_3(\bar{x}) = \frac{251}{120 f(\bar{x})}.$$

Итак, в первом приближении формула для определения $\delta = \delta(x)$ имеет вид $\delta_1 = \frac{9}{4\alpha\sqrt{Re_x}}$, во втором $\delta_2 = \frac{25}{12\alpha\sqrt{Re_x}}$, в третьем

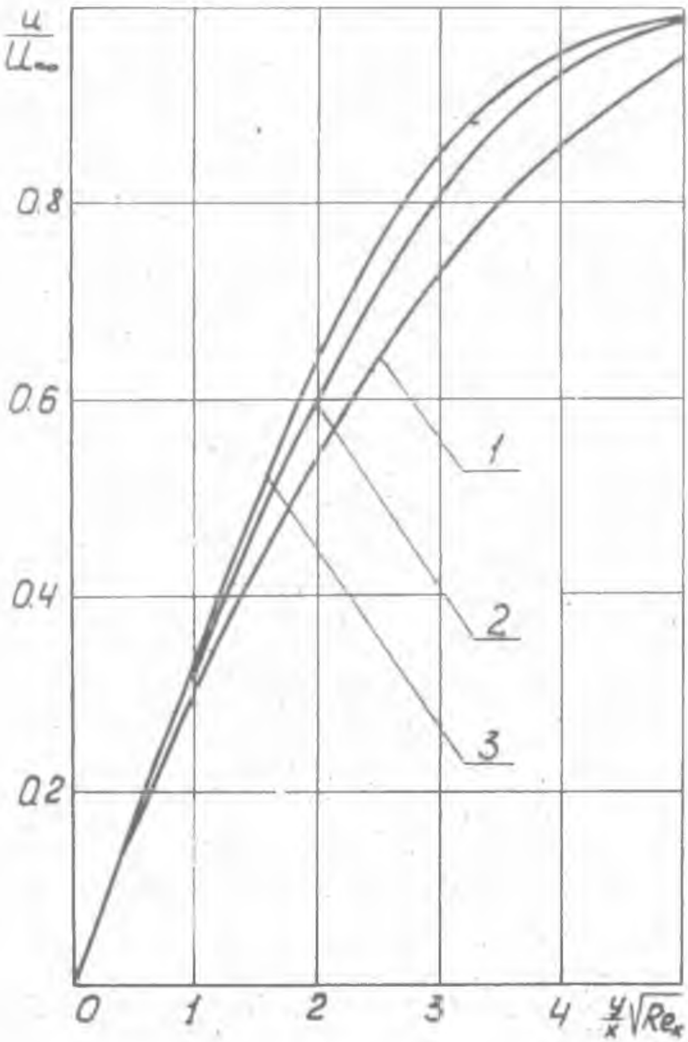
$$\delta_3 = \frac{251}{120\alpha\sqrt{Re_x}} \qquad (17)$$

Результаты расчетов продольной составляющей скорости в пограничном слое приведены на рис. I. Там же для сравнения приведены результаты точного решения согласно работе [2]. В таблице I приведены результаты расчетов по формулам (I3,I7) и по данным работы [2].

Таблица I

$\eta = y/x\sqrt{Re}$	$\frac{u}{U_\infty}$ по Хоуарту [2]	$\frac{u}{U_\infty}$ по формуле (I9)
0	0	0
0,2	0,0664I	0,0664I
0,6	0,I9894	0,I9875
I,0	0,32979	0,32866
I,4	0,45627	0,45308
I,8	0,57477	0,56869
2,2	0,68I32	0,67243
2,6	0,77246	0,76I98
3,0	0,84605	0,83595
3,4	0,90I77	0,89403
3,8	0,94II2	0,93696
4,2	0,96696	0,96637
4,6	0,98269	0,9846I
5,0	0,99I55	0,99442
5,4	0,996I6	0,99865
5,8	0,99838	0,99986
6,2	0,99937	I,00000

2. Рассмотрим более общий случай течения в пограничном слое с градиентом давления на примере поперечного обтекания потенциальным потоком круглого цилиндра. В качестве "экспериментального" напряжения трения примем зависимость, полученную при интегрировании уравнений пограничного слоя с помощью ряда Блазиуса [3]



1 - по формуле (11)

2 - по формуле (12)

3 - по данным работы [2]

Рис. I.

$$\tau = \frac{\rho U_\infty^2}{2\sqrt{Re}} f(\bar{x}) , \tag{18}$$

где $Re = \frac{\rho U_\infty R}{\mu}$, R - радиус цилиндра,

$f(\bar{x}) = 6,973\bar{x} - 2,732\bar{x}^3 + 0,292\bar{x}^5 - 0,0183\bar{x}^7 +$
$+ 0,000043\bar{x}^9 - 0,000115\bar{x}^{11}$,

$\bar{x} = \frac{x}{R}$ - безразмерная координата.

Примем

$$\delta = \frac{R}{\sqrt{Re}} T(\bar{x}) . \tag{19}$$

Подставляя (18) и (19) в (6) с учетом соотношений

$$P_x = -\frac{4\rho U_\infty^2}{R} \sin\bar{x}\cos\bar{x} ,$$

$$P_{3x} = \frac{16\rho U_\infty^2}{R^3} \sin\bar{x}\cos\bar{x} ,$$

вытекающих из уравнения Бернулли, если $U(\bar{x}) = 2U_\infty \sin\bar{x}$, получим для производных на стенке зависимости

$$U_{\bar{y}} = 0,5 U_\infty f(\bar{x}) T(\bar{x}) ,$$

$$U_{2\bar{y}} = -4U_\infty \sin\bar{x}\cos\bar{x}\, T^2(\bar{x}) ,$$

$$U_{3\bar{y}} = -\frac{U_\infty f''(\bar{x})}{Re} T^3(\bar{x}) ,$$

$$U_{4\bar{y}} = 0,25 U_\infty f(\bar{x}) T^4(\bar{x}) - \frac{32 U_\infty \cos\bar{x}\sin\bar{x}}{Re} T^4(\bar{x}) .$$

При больших числах Re можно положить

$$U_{3\bar{y}} \approx 0,\ U_{4\bar{y}} \approx 0,25 U_\infty f(\bar{x}) f'(\bar{x}) T^4(\bar{x}) .$$

Определение толщины пограничного слоя ведется в последовательности аналогичной первому примеру.

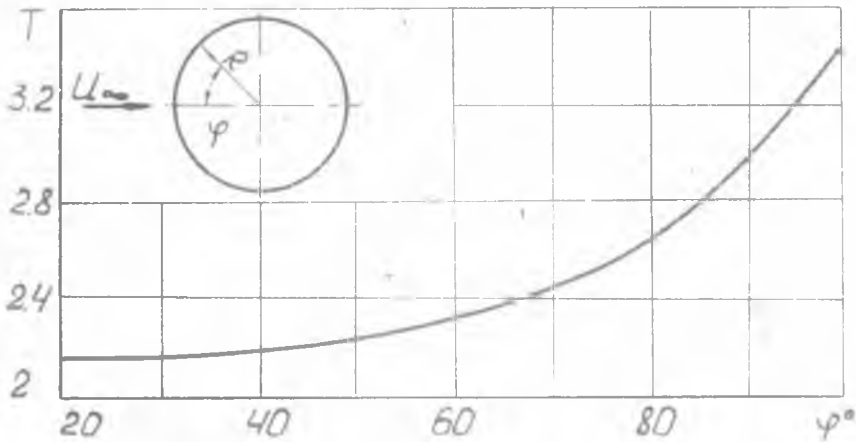


Рис. 2.

На рис. 2 приведено изменение толщины пограничного слоя, рассчитанной по формулам третьего приближения.

На рис. 3 сопоставлены профили скорости, рассчитанные по формуле (I3), с точным решением [3]. Анализ рассмотренных примеров позволяет надеяться, что изложенный метод восстановления составляющих скорости в пограничном слое по экспериментальному распределению давления и напряжения трения на поверхности тела применим в более сложных случая течения.

Литература

I. Власов В.Г. Собрание трудов. Том 5. Судпромгиз, 1959.

2. Howarth L., On the solution of the laminar boundary layer equations. Proc. Roy. Soc London A164, 1938.

3. Шлихтинг З.Г. Теория пограничного слоя. 1969.

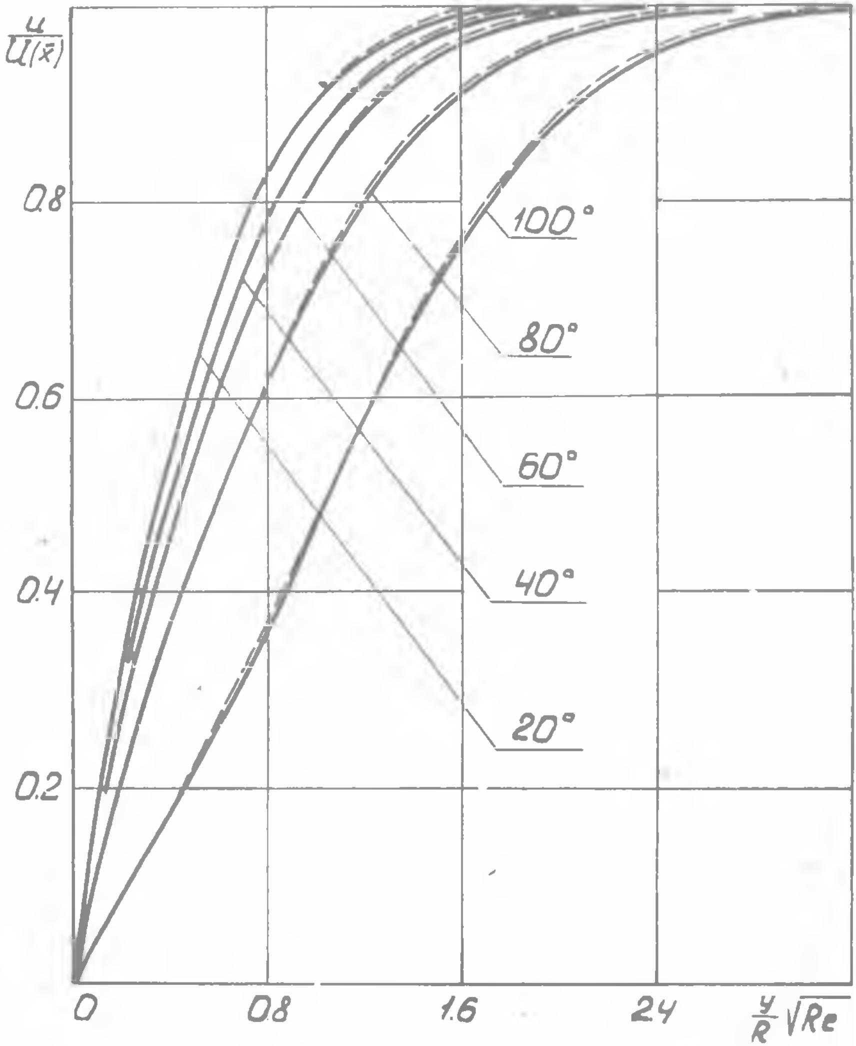


Рис. 3.

—— ряд Блазиуса [3]

– – – по формуле (13)