АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ГУДВИНА - КАЛЕЦКОГО

Б.Г. Айвазян, А.А. Нечитайло, Ю.Л. Ратис, А.И. Швидак

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1-5] была построена линейная математическая модель, предназначенная для имитации и прогнозирования работы холдинга "в целом". Подобный подход к описанию деятельности крупных холдинговых компаний в работе [6] предложено называть мидиэкономическим, поскольку он предназначен не для создания АСУ снабжения главного конвейера, а для разработки "электронного советника директора холдинговой компании".

При составлении математических моделей различных систем существенное значение имеют несколько условий. Во - первых, последовательное описание системы в терминах параметров самой этой системы возможно лишь при условии ее замкнутости или квазизамкнутости. Во - вторых, важную роль играет иерархия характерных времен эволюции системы. Последний вопрос требует особого рассмотрения.

Очевидно, что масштабы холдинга существенно меньше, чем масштабы национальной экономики, но для его интегрального описания совершенно не требуется отслеживать перемещение каждой детали или ценной бумаги. Для мидиэкономических процессов характерные времена гораздо меньшие, чем для макроэкономических, но существенно большие, чем для микроэкономических. Именно этот "промежуточный" уровень времен эволюции определяет специфику "мидиэкономики холдинга".

Холдинговая компания является типичной системой с наличием обратных связей. При этом четкое функционирование включенных в эту систему объектов определяется экономическими факторами. В частности, эффективность работы холдинга зависит от общего объема инвестиций в него, а также их распределения по предприятиям, входящим в холдинг.

При анализе экономики холдинга разумный компромисс между степенью подробности модели, вычислительной эффективностью и простотой интерпретации результатов расчета для выработки эффективного управленческого решения был достигнут в работах [3-6] посредством многомерного обобщения модели экономического регулирования Калецкого.

Согласно [3-6] в рамках холдинга взаимодействуют между собой N предприятий.

Работу подобной компании в линейном приближении описывает следующая система уравнений ($i = 1,N$):

$$\begin{cases} Z_i(t) = C_i(t) + I_i(t) + A_i(t) \\ B_i(t) = \alpha_i \cdot (1 - c_i) \cdot Y_i(t) - k_i \cdot K_i(t) \\ C_i(t) = c_i \cdot Y_i(t) \\ I_i(t) = \dfrac{1}{\theta_i}\left(K_i(t + \vartheta_i) - K_i(t)\right) \\ \dfrac{dK_i(t)}{dt} = B_i(t - \theta_i) + \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{N} \beta_{ij} Y_j(t - \theta_j) \\ Y_i(t) = \dfrac{Z_i(t)\mu_i}{D + \mu_i} + \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{N} \gamma_{ij} \cdot \dfrac{Z_j(t)\mu_j}{D + \mu_j} \end{cases} \qquad (1)$$

где i -номер предприятия, Z_i - спрос в i- м предприятии, C_i - потребительские расходы, I_i - инвестиционные расходы, A_i - независимые расходы, Y_i - продукция, K_i - величина основного капитала, B_i - объем собственных решений о капиталовложениях, $Y_i = \dfrac{Z_i\mu_i}{D + \mu_i}$ - зависимость между спросом и произведенным продуктом с учетом отставания произведенного продукта от спроса на время $1/\mu$ [5], $D = \dfrac{d}{dt}$ - дифференциальный оператор, ϑ- время отставания инвестиционных расходов от решения о капиталовложениях.

Константы α_i, c_i, k_i, θ_i и μ_i являются параметрами, подлежащими нахождению в процессе идентификации обсуждаемой математической модели.

Ограничения на уровне дирекции холдинга имеют вид:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} I_i = I \\ \sum\limits_{i=1}^{N} K_i = K \\ \sum\limits_{i=1}^{N} B_i = B \end{cases} \qquad (2)$$

I - суммарные инвестиционные расходы, где K - суммарный основной капитал, B - общий объем решений о капиталовложениях.

Приращение основного капитала каждого предприятия, входящего в холдинг, напрямую зависит от общего выпуска продукции и стратегии руководства компании, направленной на достижение максимальной эффективности капиталовложений. Причем, в силу законов сохранения коэффициенты β_{ij} подчиняются соотношению взаимности:

$$\beta_{ij} = -\beta_{ji} \tag{3}$$

С их помощью описывается перераспределение средств между предприятиями, осуществляемое руководством холдинга. Совершенно аналогично коэффициенты γ_{ij} подчиняются операторному соотношению:

$$\gamma_{ij} \cdot \frac{Z_i \mu_j}{D + \mu_j} = -\gamma_{ji} \cdot \frac{Z_i \mu_i}{D + \mu_i} \tag{4}$$

которое является обобщенным операторным условием взаимности.

Целью настоящей работы является применение методов теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом для анализа работы холдинга "в целом".

2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Рассмотрим вопрос о представлении решений линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

В последние годы выяснилась та большая роль, которую играют системы уравнений с запаздывающим аргументом в различных вопросах математической экономики и теории оптимального управления. Поэтому ниже мы приведем достаточно полное изложение теории линейных и квазилинейных систем дифференциальных уравнений с постоянными запаздываниями, опираясь на методы и результаты работы [8].

С математической точки зрения система уравнений (1) является частным случаем более общей системы уравнений:

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{l=1}^{n} \int_{-\tau_l}^{0} \left[x_l(t+\vartheta) + f_l\left(t, x_l(t+\vartheta)\right) \right] dg_{sl}(\vartheta), \tag{5}$$

где индекс s пробегает значения $s = 1, \ldots, n$, $f_l\left(t, \vec{x}(t+\vartheta)\right)$ - некоторый, вообще говоря, нелинейный функционал, зависящий от вектор - функции $\vec{x}(t)$ (вектор - столбец, составленный из функцией $x_l(t+\vartheta)$), а через $g_{sl}(\vartheta)$, (l = 1,...,n) обозначена совокупность функций ограниченной вариации, заданных на отрезке [-h, 0].

Далее для сокращения записи мы будем использовать матричные обозначения. Например, положим $\hat{G}(\vartheta)) = \{g_{sl}(\vartheta)\}$, $s,l=\overline{1,n}$. Тогда систему (5) можно записать в компактной форме:

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \int_{-h}^{0} d\hat{G}(\vartheta)\left[\hat{x}(t+\vartheta) + \hat{f}\left(t, \hat{x}(t+\vartheta)\right)\right], \tag{6}$$

где $d\hat{G}(\vartheta)$ значок дифференциала относится только к элементам матрицы $\hat{G}(\vartheta)$.

Для "достаточно хороших" функционалов $f_l\left(t, \hat{x}(t+\vartheta)\right)$ система (6) имеет единственное решение при условии, что $\hat{x}(t) = \hat{\varphi}(t)$; $t\in[-h, 0]$, где $\hat{\varphi}(t)$ - некоторая заданная векторная функция. Подобные задачи для систем вида (6) были рассмотрены в работе [8]. Согласно [8] решение системы (6) существует для любой непрерывной векторной функции $\hat{\varphi}(t)$, заданной на отрезке [-h, 0], причем для случая ограниченных сверху функционалов ($\left\|\hat{f}\left(t, \hat{x}(t+\vartheta)\right)\right\| \le F_{max}$) на всем промежутке $t\in[-h,+\infty[$ имеет место оценка $\|\hat{x}(t)\| \le M\cdot\exp(ct)$, где M, c - некоторые постоянные.

В настоящей работе мы воспользуемся методами теории возмущений и рассмотрим случай слабой зависимости $\hat{f}\left(t, \hat{x}(t+\vartheta)\right)$ от $\hat{x}(t+\vartheta)$. Поэтому в нулевом приближении будем считать функционал $\hat{f}\left(t, \hat{u}(t+\vartheta)\right)$ известным (то - есть, заданные функции $\hat{x}^{(0)}(t+\vartheta) \equiv \hat{u}(t+\vartheta)$ представляют собой нулевое приближение решения системы (6)).

Запишем нулевое приближение для системы уравнений (6) в следующем виде:

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \int_{-h}^{0} d\hat{G}(\vartheta)\left[\hat{x}(t+\vartheta) + \hat{f}\left(t, \hat{u}(t+\vartheta)\right)\right], \tag{7}$$

Система (7) может быть представлена как:

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \int_{-h}^{0} d\hat{G}(\vartheta)\left[\hat{x}(t+\vartheta) + \hat{F}(t,\vartheta)\right], \tag{8}$$

где $\hat{F}(t,\vartheta) = \hat{f}\left(t, \hat{u}(t+\vartheta)\right)$ и решена с помощью преобразования Лапласа:

$$\int_{0}^{\infty} dt \frac{d\hat{x}(t)}{dt}\cdot\exp(-\lambda t) = \int_{0}^{\infty} dt\exp(-\lambda t)\int_{-h}^{0} d\hat{G}(\vartheta)\left[\hat{x}(t+\vartheta) + \hat{F}(t,\vartheta)\right] \tag{9}$$

Обозначим через $\hat{\chi}(t)$ интеграл:

$$\hat{\chi}(t) = \int_{-h}^{0} d\hat{G}(\vartheta)\hat{F}(t,\vartheta)\,. \tag{10}$$

Лапласовские образы функций будем обозначать будем обозначать теми же буквами, что и исходные, но при этом тильду будем заменять на волну:

$$\int_{0}^{\infty} dt \cdot \hat{x}(t) \cdot \exp(-\lambda t) = \tilde{x}(\lambda) \tag{11}$$

$$\int_{0}^{\infty} dt \cdot \hat{\chi}(t) \cdot \exp(-\lambda t) = \tilde{\chi}(\lambda) \tag{12}$$

$$\int_{0}^{\infty} dt \frac{d\hat{x}(t)}{dt} \cdot \exp(-\lambda t) = \lambda \cdot \tilde{x}(\lambda) - \hat{\varphi}(0) \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{0}^{\infty} dt \exp(-\lambda t)\int_{-h}^{0} d\hat{G}(\vartheta)\hat{x}(t+\vartheta) = \int_{-h}^{0} d\hat{G}(\vartheta)\int_{0}^{\infty} dt \exp(-\lambda t)\hat{x}(t+\vartheta) = \\
&= \int_{-h}^{0} d\hat{G}(\vartheta)\exp(\lambda\vartheta)\int_{0}^{\infty} dt \exp(-\lambda(t+\vartheta))\hat{x}(t+\vartheta) = \\
&= \int_{-h}^{0} d\hat{G}(\vartheta)\exp(\lambda\vartheta)\int_{\vartheta}^{\infty} dt \exp(-\lambda t)\hat{x}(t) = \\
&= \int_{-h}^{0} d\hat{G}(\vartheta)\exp(\lambda\vartheta)\left[\int_{0}^{\infty} dt \exp(-\lambda t)\hat{x}(t) - \int_{0}^{\vartheta} dt \exp(-\lambda t)\hat{x}(t)\right] = \\
&= \int_{-h}^{0} d\hat{G}(\vartheta)\exp(\lambda\vartheta)\left[\tilde{x}(\lambda) - \int_{0}^{\vartheta} dt \exp(-\lambda t)\hat{\varphi}(t)\right]
\end{aligned} \tag{14}$$

С учетом формул (10)- (14) система уравнений (9) принимает вид:

$$\lambda \cdot \tilde{x}(\lambda) - \hat{\varphi}(0) = \int_{-h}^{0} d\hat{G}(\vartheta)\exp(\lambda\vartheta)\tilde{x}(\lambda) - \tilde{B}(\lambda) + \tilde{\chi}(\lambda)\,, \tag{15}$$

где

$$\tilde{B}(\lambda) = \int_{-h}^{0} d\hat{G}(\vartheta)\exp(\lambda\vartheta)\int_{0}^{\vartheta} dt \exp(-\lambda t)\hat{\varphi}(t)\,. \tag{16}$$

Обозначим через $A(\lambda)$ матрицу:

$$A(\lambda) = \int_{-h}^{0} e^{\lambda\vartheta} dG(\vartheta) - \lambda E\,, \tag{17}$$

где E - единичная матрица. Тогда система уравнений (15) перепишется как:

$$A(\lambda)\tilde{x}(\lambda) = \tilde{B}(\lambda) - \tilde{\chi}(\lambda) - \hat{\varphi}(0)\,. \tag{18}$$

Уравнение (18) имеет очевидное решение:

$$\bar{x}(\lambda) = A^{-1}(\lambda)\cdot\left[\bar{B}(\lambda) - \tilde{\chi}(\lambda) - \hat{\varphi}(0)\right], \tag{19}$$

где $A^{-1}(\lambda)$ - матрица, обратная матрице $A(\lambda)$.

Для нахождения решения системы (6) в оригиналах произведем обратное преобразование Лапласа:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} A^{-1}(\lambda)\left[\bar{B}(\lambda) - \tilde{\chi}(\lambda) - \hat{\varphi}(0)\right] d\lambda \tag{20}$$

Соотношение (20) дает полное решение поставленной задачи (8). Однако, возможности аналитических методов на этом не кончаются.

Представим решение исходной задачи в следующем виде:

$$\hat{x}(t) = \hat{x}_1(t) + \hat{x}_2(t) + \hat{x}_3(t) \quad , \tag{21}$$

$$\hat{x}_1(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} A^{-1}(\lambda)\bar{B}(\lambda) d\lambda , \tag{22}$$

$$\hat{x}_2(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} A^{-1}(\lambda)\tilde{\chi}(\lambda) d\lambda , \tag{23}$$

$$\hat{x}_3(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} A^{-1}(\lambda)\hat{\varphi}(0) d\lambda . \tag{24}$$

В формуле (21) слагаемое $\hat{x}_3(t)$ представляет собой член, определяемый начальными условиями, слагаемое $\hat{x}_1(t)$ описывает влияние "начального сценария" развития динамической системы с "запаздываниями", а слагаемое $\hat{x}_2(t)$ отвечает за влияние "внешних воздействий". В случае, когда зависимость $\hat{f}(t, \hat{x}(t+\vartheta))$ от $\hat{x}(t+\vartheta)$ не является пренебрежимо малой, формула (21) из формальной записи решения исходной задачи превращается в интегральное уравнение. Его исследование является целью следующей работы. В данной же работе мы ограничимся рассмотрением квазилинейных задач, допускающих решение в рамках теории возмущений. То есть, на данном этапе мы будем изучать только самосогласованные управляемые системы.

Каждый из интегралов (22) – (24) может быть вычислен с помощью методов теории аналитических функций. В самом деле, в работе [8] показано, что все корни уравнения:

$$\det A(\lambda) = 0 \tag{25}$$

лежат в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda \le c$, где c - число, фигурирующее в приведенной выше оценке нормы решения $\|x(t)\| \le M \cdot \exp(ct)$.

Обозначим через $\lambda_1,...,\lambda_n,...$ корни уравнения (25), перенумеровав их так, что $\mathrm{Re}(\lambda_1) \ge \mathrm{Re}(\lambda_2) \ge ...$

Пусть s_j есть кратность корня λ_j уравнения (25). Разобьем точки λ_j, $j = 1, 2,...$ на группы, отнеся в одну группу те, которые имеют одинаковые действительные части. Таким образом, каждая из групп будет характеризоваться одним из чисел $\sigma_1 > \sigma_2 > ...$, при этом σ_j - действительная часть корней, входящих в j- ю группу. Покажем теперь, что каждая из таких групп конечна.

В самом деле, элементами матрицы $\int_{-h}^{0} e^{\lambda\vartheta} dG(\vartheta)$ являются целые функции $\varphi_{sl}(\lambda) = \int_{-h}^{0} e^{\lambda\vartheta} dg_{sl}(\vartheta)$. Легко видеть, что эти функции ограничены полосе $a \le \mathrm{Re}\lambda \le b$, (причем $a > -\infty$). Поэтому функции b_k в соотношении

$$\det A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + \sum_{k=1}^{n} b_k \lambda^{n-k} \tag{26}$$

будут также ограниченными в указанной полосе, так как они являются конечными полиномами относительно функций $\varphi_{sl}(\lambda)$. Отсюда следует, что если λ принадлежит полосе ($a \le \mathrm{Re}\lambda \le b$) и $|\lambda| > B > 0$, где B - достаточно большое число, то $|\det A(\lambda)| > 0$. Таким образом, корни уравнения (25) расположены полностью внутри области $a \le \mathrm{Re}\lambda \le b$, $|\lambda| \le B$, а точки сгущения корней в конечной области на комплексной плоскости быть не может. Следовательно, в указанной полосе расположено лишь конечное число корней.

В рамках теории аналитических функций доказывается теорема, согласно которой каждому корню λ_i уравнения (25) отвечает определенный вклад в решение $\hat{x}(t)$ системы уравнений (7). Согласно этой теореме соотношения (22)-(24) могут быть представлены в форме:

$$\hat{x}_i(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_j \int_{c_j^*} e^{\lambda t} A^{-1}(\lambda) \tilde{F}_i(\lambda) d\lambda, \tag{27}$$

где $\tilde{F}_1(\lambda) = \tilde{B}(\lambda)$, $\tilde{F}_2(\lambda) = -\tilde{\chi}(\lambda)$, $\tilde{F}_3(\lambda) = -\hat{\varphi}(0)$, c_1^* - окружность радиуса r_j с центром в точке $\lambda = \lambda_i$ такая, что в круге $|\lambda - \lambda_i| \le r_i$ нет других корней уравнения (25), а $\tilde{F}_i(\lambda)$ - однозначная аналитическая функция в этом замкнутом круге. Интегрирование в формуле

(27) ведется против часовой стрелки. Подробное доказательство этого утверждения для случая однородной системы уравнений (6) также приведено в работе [8]. Перенесение описанных выше методов на более общий случай, рассматриваемый в настоящей работе тривиально. Просто при вычислении i - той суммы по полюсам λ_j к множеству корней уравнения (25) необходимо добавить множество корней уравнений

$$\frac{1}{\left\{\tilde{F}_i(\lambda)\right\}_k} = 0, \tag{28}$$

где $\left\{\tilde{F}_i(\lambda)\right\}_k$ элемент, находящийся в k -той строке вектор - столбца $\tilde{F}_i(\lambda)$.

Корни уравнений (28) в отличие от корней уравнения (25) могут иметь области сгущения, однако это обстоятельство мало влияет на вычислительную сложность задачи. Попутно отметим, что каждому корню λ_j уравнения (25) в сумме (27) отвечает целая функция $P_j(t)\cdot\exp(\lambda_j t)$, где $P_j(t)$ представляет собой полином относительно t степени не выше $s_j - 1$ с векторными постоянными коэффициентами.

Необходимо подчеркнуть, что формальное соотношение (28) имеет общий характер. Например, при конкретных вычислениях уравнение (28) для j=3 смысла не имеет, поскольку $\tilde{F}_3(\lambda) = -\tilde{\varphi}(0)$. Интеграл (23) легко вычисляется по теореме о конволюции:

$$\hat{x}_2(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}A^{-1}(\lambda)\tilde{\chi}(\lambda)d\lambda = \int_0^t \hat{\rho}(t)\hat{\chi}(t-u)du \tag{29}$$

причем весовая функция $\hat{\rho}(t)$ полностью определяется корнями уравнения (25), поскольку:

$$\hat{\rho}(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}A^{-1}(\lambda)d\lambda \tag{30}$$

При вычислении интеграла (22) теорема о конволюции также применима. Однако при этом необходимо использовать методы теории обобщенных функций и в настоящей работе мы соответствующие выражения в общем виде выписывать не будем.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ "ХОЛДИНГА В ЦЕЛОМ"

В приближении "холдинг в целом" система уравнений (1) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{cases} \dfrac{dY(t)}{dt} = \mu \cdot \left(\dfrac{1}{\theta}[K(t+\theta) - K(t)] + A(t) - (1-c)Y(t) \right), \\ \dfrac{dK(t+\theta)}{dt} = \alpha \cdot (1-c) \cdot Y(t) - k \cdot K(t). \end{cases} \tag{31}$$

Подчеркнем, что в системе (31) параметр μ определяет запаздывание предложения от спроса, а ϑ определяет "инвестиционную историю" холдинга.

Применим общие соотношения (21) - (30) к решению системы (31). В этом случае система уравнений (31), записанная для лапласовских изображений, приобретает вид:

$$\begin{cases} [\lambda + \mu(1-c)]\tilde{Y}(\lambda) - \dfrac{\mu}{\vartheta}[\exp(\lambda\vartheta) - 1]\tilde{K}(\lambda) = \mu\tilde{A}(\lambda) + Y(0) - \dfrac{\mu}{\vartheta}\exp(\lambda\vartheta)\tilde{K}_0(\lambda) \\ -\alpha(1-c)\tilde{Y}(\lambda) + [\lambda \cdot \exp(\lambda\vartheta) + k]\tilde{K}(\lambda) = \lambda \cdot \exp(\lambda\vartheta)\tilde{K}_0(\lambda) + K(\vartheta), \end{cases} \tag{32}$$

где величина

$$\tilde{K}_0(\lambda) = \int_0^{\vartheta} dt \cdot \exp(-\lambda t) K_0(t) \tag{33}$$

описывает "инвестиционную историю холдинга" ($K(t) = K_0(t)$ при $t \in [\theta, \vartheta]$).

Система (25) в данном случае превращается в трансцендентное уравнение:

$$\Delta(\lambda) = 0 , \tag{34}$$

где аналитическая фукция

$$\Delta(\lambda) = (\lambda + \mu(1-c))(\lambda \cdot \exp(\lambda\vartheta) + k) - \mu\alpha \cdot (1-c)\frac{\exp(\lambda\vartheta) - 1}{\vartheta} \tag{35}$$

представляет собой определитель матрицы $A(\lambda)$ (18) для системы (32).

Система уравнений (32) имеет очевидное решение:

$$\begin{cases} \tilde{Y}(\lambda) = \tilde{\kappa}_1(\lambda) + \tilde{\kappa}_2(\lambda) \cdot \tilde{A}(\lambda) + \tilde{\kappa}_3(\lambda) \cdot \tilde{K}_0(\lambda) \\ \tilde{K}(\lambda) = \tilde{\eta}_1(\lambda) + \tilde{\eta}_2(\lambda) \cdot \tilde{A}(\lambda) + \tilde{\eta}_3(\lambda) \cdot \tilde{K}_0(\lambda). \end{cases} \tag{36}$$

где

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1(\lambda) = \dfrac{(\lambda \exp(\lambda\vartheta) + k)Y(0) + (\mu/\vartheta)(\exp(\lambda\vartheta) - 1)K(\vartheta)}{\Delta(\lambda)} \\ \tilde{\kappa}_2(\lambda) = \dfrac{\mu(\lambda \exp(\lambda\vartheta) + k)}{\Delta(\lambda)} \\ \tilde{\kappa}_3(\lambda) = -\dfrac{\mu}{\vartheta}\dfrac{(\lambda + k)\exp(\lambda\vartheta)}{\Delta(\lambda)} \end{cases} \tag{37}$$

$$
\begin{cases}
\tilde{\eta}_1(\lambda) = \dfrac{\alpha(1-c)Y(0) + \big(\lambda + \mu(1-c)\big)K(\vartheta)}{\Delta(\lambda)} \\
\tilde{\eta}_2(\lambda) = \dfrac{\alpha\mu(1-c)}{\Delta(\lambda)} \\
\tilde{\eta}_3(\lambda) = \dfrac{1}{\vartheta}\dfrac{\big(\vartheta\lambda^2 + \mu(1-c)(\vartheta\lambda - \alpha)\big)\exp(\lambda\vartheta)}{\Delta(\lambda)}
\end{cases}
\tag{38}
$$

Совершенно очевидно, что коэффициенты, определяемые соотношениями (37), (38) являются аналитическими функциями аргумента λ. Они имеют лишь полюса, положение которых определяется уравнением (34). Лапласовские оригиналы этих функций имеют вид:

$$
\begin{cases}
\kappa_i(t) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \operatorname{res}_j\left[\exp(\lambda t)\tilde{\kappa}_i(\lambda)\right] \equiv \sum\limits_{j=1}^{\infty} \kappa_i^{(j)}(t) \\
\eta_i(t) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \operatorname{res}_j\left[\exp(\lambda t)\tilde{\eta}_i(\lambda)\right] \equiv \sum\limits_{j=1}^{\infty} \eta_i^{(j)}(t)
\end{cases}
\tag{39}
$$

Если уравнение (34) имеет корни кратности s_j (включая случай простых корней, т.е. $s_j = 1$), то j-тое слагаемое в сумме (39) имеет вид:

$$
\begin{cases}
\kappa_i^{(j)}(t) = \dfrac{1}{(s_j-1)!}\dfrac{d^{s_j-1}}{d\lambda^{s_j-1}}\left[\exp(\lambda t)\tilde{\kappa}_i(\lambda)(\lambda-\lambda_j)^{s_j}\right]_{\lambda=\lambda_j} = \exp(\lambda_j t)\cdot\sum\limits_{k=1}^{s_j-1} t^k v_k \\
\eta_i^{(j)}(t) = \dfrac{1}{(s_j-1)!}\dfrac{d^{s_j-1}}{d\lambda^{s_j-1}}\left[\exp(\lambda t)\tilde{\eta}_i(\lambda)(\lambda-\lambda_j)^{s_j}\right]_{\lambda=\lambda_j} = \exp(\lambda_j t)\cdot\sum\limits_{k=1}^{s_j-1} t^k w_k
\end{cases}
\tag{40}
$$

где v_k, w_k - постоянные коэффициенты, вычисляемые согласно алгоритму (40).

Для нахождения окончательного результата еще раз воспользуемся теоремой о конволюции, а также тем фактом, что независимые расходы $A(t)$ и "инвестиционная история" $K(t) = K_0(t)$, $t \in [0,\vartheta]$ считаются известными функциями времени.

Тогда

$$
\begin{cases}
Y(t) = \sum\limits_{l=1}^{3} Y_l(t) \\
K(t) = \sum\limits_{l=1}^{3} K_l(t)
\end{cases}
\tag{41}
$$

причем

$$\begin{cases} Y_1(t) = \sum_{j=1}^{n} \kappa_1^{(j)}(t) \\ K_1(t) = \sum_{j=1}^{n} \eta_1^{(j)}(t) \end{cases} \tag{42}$$

$$\begin{cases} Y_2(t) = \int_0^t \kappa_2(\xi) A(t-\xi) d\xi \\ K_2(t) = \int_0^t \eta_2(\xi) A(t-\xi) d\xi \end{cases} \tag{43}$$

$$\begin{cases} Y_3(t) = \int_0^\tau \kappa_3(\xi) K_0(t-\xi) d\xi \\ K_3(t) = \int_0^\tau \eta_3(\xi) K_0(t-\xi) d\xi \end{cases} , \tag{44}$$

причем $\tau = \min(t, \vartheta)$. Формулы (40) - (44) дают исчерпывающее описание динамики холдинга "в целом".

Отметим, что в случае малых времен запаздывания решений об инвестициях система уравнений (31) превращается в стандартную систему линейных дифференциальных уравнений. В этом случае в нулевом приближении по параметру ϑ уравнение (35) принимает вид:

$$\lambda^2 + 2\zeta_1\lambda + \zeta_2 = 0, \tag{45}$$

где $2\zeta_1 = \mu(1-\alpha)(1-c) + k$, $\zeta_2 = k\mu(1-c)$. Корни этого уравнения очевидным образом выражаются через параметры модели Гудвина - Калецкого:

$$\lambda_{1,2} = -\zeta_1 \pm \sqrt{(\zeta_1)^2 - \zeta_2}. \tag{46}$$

Сама модель Гудвина - Калецкого в этом случае становится тривиальной. Однако, поскольку ее строгая идентификация едва ли является целесообразной, то определение входящих в нее параметров следует производить с помощью итерационного процесса, уточняя указанные параметры одновременно с детализацией и усложнением модели.

4. ИНВЕСТИЦИОННЫЙ СЦЕНАРИЙ

Изложенный выше математический аппарат позволяет качественно исследовать исключительно важный с практической точки зрения вопрос о том, каков оптимальный сценарий капиталовложений в холдинг при заданном сценарии независимых расходов.

На данном этапе рассмотрения ограничимся решением следующей задачи: определим критерии, по которым можно будет судить о разумности темпов капиталовложений.

В настоящей работе примем за основу тезис о том, что значения капитала K в моменты времени $t = 0$ и $t = \vartheta$ фиксированы и определим условия при которых достигает максимума некоторый интеграл от линейной комбинации количества произведенного продукта и скорости его прироста. То - есть, целевая функция, подлежащая максимизации по поручению руководства холдинга, имеет вид:

$$R = c_1 \int_0^T Y(t)dt + c_2 [Y(T) - Y(0)]. \tag{47}$$

При заданном сценарии независимых расходов слагаемые $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ не меняются при вариации функции $K_0(t)$. Учитывая, что $Y_3(t) = \int_0^t \kappa_3(\xi) K_0(t-\xi) d\xi$, мы приходим к задаче максимизации линейного функционала (47).

На основе целевой функции (47) возможно проведение вычислительных экспериментов (решение задачи непрерывного линейного программирования), позволяющих руководству холдинга оценить степень разумности того или иного сценария капиталовложений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Резюмируем вышесказанное следующим образом.

1. Построены алгоритмы решения многомерных квазилинейных задач для динамических систем с запаздыванием.
2. Проведено подробное исследование аналитических свойств модели Гудвина - Калецкого.
3. Сформулирована задача непрерывного линейного программирования, позволяющая производить оценку степени разумности различных инвестиционных сценариев.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kalecki M. Theory of Economic Dynamics., Allen and Unwin, 1954.

2.Goodwin R.M. The non-linear accelerator and the Persistence of Business Cycles, Econometrica,1951, №19, p1-17.

3.Ратис Ю.Л., Столяр В.В. Математическая модель функционирования энергетической системы города, «Рыночная экономика», Сб. трудов отделения экономики РАН, Самара, 1998.

4.Климов В.М., Ратис Ю.Л., Столяр В.В. Обобщенная модель Калецкого для описания экономики больших городов, Сб. «Управление организационно - техническими системами: моделирование взаимодействий, принятие решений». ИПУ РАН- СГАУ, Москва-Самара, 1997.

5.Phillips A.W. Stabilisation Policy in Closed Economy, Economic Journal, 1954, 1 №64, p.290-323.

6.А.И. Швидак, Ю.Л. Ратис. Инвестиционная политика банка в условиях нестабильной экономики. Концепция микрополиса и малой финансово - промышленной группы. Направлена в печать.

7.Аллен Р. Математическая экономия, ИИЛ, М., 1963, 667 с.

8.В.И. Зубов. Лекции по теории управления, -М.: Наука , 1975. 494 с.