ХОЛДИНГ В УСЛОВИЯХ ЭКОНОМИКИ ПЕРЕХОДНОГО ПЕРИОДА. СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

В.Г. Засканов, Ю.Л. Ратис, Б.Г. Айвазян, Н.И. Кутиков

1. Введение

Рассмотрим работу некоторой российской холдинговой компании, в состав которой входит ряд предприятий (см. рис. 1). В соответствии с подходом работ [1, 22] предположим, что они образуют квазизамкнутую систему, в рамках которой происходит обмен сырьем, переработанными материалами, комплектующими, конечным продуктом (товаром), частью основных фондов, информацией, ценными бумагами, а также производятся денежные расчеты, включая денежные и товарные кредиты, бартер и взаимозачеты.

Проблема интегральной оценки деятельности подобного холдинга близка к задачам вероятностных актуарных расчетов, встречающихся при страховании различных рисков, однако содержит элементы динамики, связанные с необходимостью непрерывного отслеживания эволюции состояния холдинга.

Российская специфика определяется несколькими факторами.

Во-первых, в России никогда не существовало отлаженной системы сбора, обработки и классификации экономической информации. В стране без рыночной экономики экономическая информация была практически никому не нужна. В силу этого до сих пор оставляет желать лучшего культура работы с экономическими показателями. И если на уровне макроэкономики имеются определенные успехи, то на микроэкономическом уровне дела обстоят гораздо хуже. Как следствие, экономическая информация, публикуемая в российских экономических изданиях, размещаемая в компьютерных сетях и т.д., служащая основой для заключения контрактов и разработки экономических проектов, имеет меньший уровень достоверности, чем аналогичная информация, представленная в изданиях семи наиболее экономических развитых стран.

Во-вторых, экономическая информация никогда не бывает полной.

В третьих, любой прогноз, в том числе, оптимизационный, всегда носит вероятностный - характер. При решении любой динамической задачи даже незначительная неопределенность в задании начальных условий с течением времени приводит к полной утрате информации об изучаемой системе

В четвертых, при наличии в системе большого числа связей и опосредствовании динамические закономерности начинают уступать место статистическим. Проследить динамику каждого показателя большой системы не представляется возможным и приходится ограничиваться анализом усредненных или интегральных параметров, при построении которых в том или ином виде используются укрупненные показатели, а, также функции распределения вероятностей по элементам статистических коллективов.

В пятых, для принятия эффективных управленческих решений необходим ясный и однозначно интерпретируемый язык науки, основанный на использовании ограниченного числа параметров. Человеческое мышление является в некотором смысле одномерным и любая классификация или схема, содержащая больше 10-12 параметров, становится малопригодной для широкого внедрения в экономическую практику. Такую переусложненную схему может освоить только узкий круг высококвалифицированных специалистов. Прагматически более полезными оказываются менее информативные, но более доступные широкому кругу пользователей системы. Они то и имеют наибольшее значение для рынка.

Целью настоящего исследования является структурный анализ работы конкретного холдинга и формирование статистического подходов к составлению среднесрочных планов и интегральной оценки его деятельности.

2. Холдинг как квазизамкнутая экономическая система. Структурная модель

В качестве примера рассмотрим конкретный холдинг, состоящий из следующих блоков:

1. Информационный блок.
2. Финансовый блок.
3. Промышленый блок.

Конкретная структура каждого из блоков приведена на рис. 1

Рассмотрим приведенную схему с точки зрения принятия управленческих решений. На каждом уровне организации работы системы происходит обмен ресурсами, продукцией, информацией и вообще любым выставляемым на рынок товаром (включая деньги и ценные бумаги). Для эффективной работы холдинга в целом необходимо принимать эффективные управленческие решения на основе имеющейся экономической информации.


ХОЛДИНГ
Информационный блок
Финансовый блок
Промышленный блок
- Газета
- Радио
- Телевидение
- Банк
- Финансовая компания
- Пенсионный фонд
- Страховая компания
- Розничная торговля
- Перерабатывающее предприятие
- Оптовая торговля
- Строительная фирма
- Предприятие легкой промышленности
-Группа обслуживания
-Перевозки ж/д
-Перевозки А/т
-Ремонтно-эксплуатационная гр

Рис.1.

Учитывая приведенную выше аргументацию, можно сказать, что анализ и оптимизация экономической деятельности больших (квазизамкнутых) групп предприятий с точки зрения принятия практических управленческих решений сводится к сбору экономической информации, анализу ее достоверности, построению на ее основе интегральных оценок и прогнозов и, в дальнейшем, выработке стратегии и тактики развития. В этой последовательности задач на первое место выходит задача построения алгоритмов обработки экономической информации.

3. Холдинг как статистическая система. Интегральная математическая модель

В работе [1] было показано, что для статистического анализа квазизамкнутых экономик наилучшим образом подходит формализм информационной энтропии.

Изложим основные идеи информационно – энтропийного подхода к анализу работы холдинга, как типичной квазизамкнутой экономики, следуя [1].

Задача измерения и анализа информации (в том числе, экономической), в конечном счете, сводится к теории меры. В рамках этой теории на некотором интересующем нас множестве необходимо ввести неотрицательную функцию, обладающую рядом свойств.

Классическими и исторически первыми конкретными реализациями теории меры были теория вероятности и математическая статистика.

Впервые количественное определение информации ввел Р.А.Фишер в 1925 году [2-4]. Логарифмические меры информации были предложены одновременно и независимо в 1948 году К. Шенноном и Н. Винером [5,6].

Принцип максимума информационной энтропии был сформулирован в 1957 году Э.Т. Джейнсом [7]. Наиболее существенное развитие и обобщение принципа максимума информационной энтропии и приложение вероятностных мер для анализа информации были выполнены в работах [8-20].

Ниже изложены наиболее важные результаты теории информации, полученные в упомянутых работах [2-20]. Дальнейший анализ экономических процессов будет во многом опираться на классический формализм принципа максимума информационной энтропии и нам будут в высшей степени полезны соответствующая терминология и обозначения.

Рассмотрим множество возможных событий, вероятности реализации которых равны $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. На меру этого множества $H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ накладываются следующие ограничения:

1. Мера H должна быть неотрицательной и непрерывной относительно p_i

2. Если все события равновероятны, т. е. $p_i = 1/n$, то мера H должна быть монотонно возрастающей функцией от n. Действительно, в случае равной вероятности событий имеется больше возможностей выбора или большая неопределенность, чем в случае событий разной вероятности.

3. Если выбор распадается на два последовательных выбора, то первоначальная мера H должна быть суммой взвешенных индивидуальных значений H.

В работе [5] Шеннон показал, что существует единственная функция H, называемая энтропией и удовлетворяющая всем трем перечисленным условиям. Она имеет вид:

$$H = -k \sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i), \tag{1}$$

где k - положительная константа.

Величина H в формуле (1) называется энтропией множества вероятностей $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Если имеется некоторая случайная величина x, то ее энтропия будет обозначаться как H(x); при этом x не является аргументом функции H, а только указывает, к какой именно случайной величине относится выражение для энтропии.

Энтропия Шеннона (1) обладает рядом свойств, подтверждающих обоснованность выбора ее в качестве меры количества информации и неопределенности

1. H=0 тогда и только тогда, если все вероятности p_i, кроме одной, равны нулю, а эта единственная равна 1. Иными словами, энтропия равна нулю лишь в случае полной определенности исхода.

2. При заданном количестве исходов n величина H максимальна и равна ln(n) когда все p_i равны ($p_i = 1/n$).

3. Пусть имеется два события x и y с m возможными исходами для x и n возможными исходами для y. Обозначим через p(i,j) совместную вероятность исходов i и j событий x и y. Тогда

$$H(x) = -\sum_{i,j} p(i,j) \ln \sum_{k} p(i,k)$$

$$H(y) = -\sum_{i,j} p(i,j) \cdot \ln \sum_k p(k,j) \tag{2}$$

$$H(x,y) = -\sum_{i,j} p(i,j) \cdot \ln[p(i,j)] \,.$$

Очевидно, что функция H удовлетворяет стандартному неравенству треугольника, которому по определению должна подчиняться мера любого множества:

$$H(x,y) \le H(x) + H(y) \tag{3}$$

Знак равенства имеет место лишь для независимых событий. Неравенство треугольника применительно к теории вероятности гласит, что неопределенность совместного события не превосходит сумму неопределенностей отдельных событий.

4. Всякое изменение вероятностей $p_1, p_2, \ldots, p_n$ в сторону их выравнивания увеличивает величину функции H. В общем виде, если произвести подстановку:

$$p_i = \sum_j a_{ij} \cdot p_j \;,$$

причем

$$\sum_i a_{ij} = \sum_j a_{ij} = 1 \qquad и \qquad a_{ij} \ge 0 \;,$$

то функция H возрастает.

5. Условная энтропия $H_x(y)$ величины y определяется как величина, получаемая при усреднении энтропии y, вычисленной по всем значениям x с весами, равными вероятностям этих значений x, то есть:

$$H_x(y) = -\sum_{i,j} p(i,j) \cdot \ln[p_i(j)] \,. \tag{4}$$

где

$$p_i(j) = \frac{p(i,j)}{\sum_k p(i,k)} \tag{5}$$

- условная вероятность того, что при значении i для события x событие y примет значение j. Поэтому получаем:

$$H_x(y) = -\sum_{i,j} p(i,j) \cdot \ln p(i,j) + \sum_{i,j} p(i,j) \cdot \ln \sum_k p(i,k) = H(x,y) - H(x) \tag{6}$$

Таким образом,

$$H(x,y) = H(x) + H_x(y) \tag{7}$$

- неопределенность совместного события (x,y) равна сумме неопределенностей события x и события y, при условии, что событие x произошло.

6. Из свойств (3) и (5) следует, что

$$H(x) + H(y) \geq H(x, y) = H(x) + H_x(y) \tag{8}$$

или

$$H(y) \geq H_x(y) \, . \tag{9}$$

то есть энтропия события y не возрастает от того, что событие x становится известным. Если события x и y не являются независимыми, то H(y) уменьшается. В противном случае она не изменяется.

7. Энтропия (1) является выпуклой функцией [16]. Это означает, что для вероятности:

$$p = \lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2 \text{ и } \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \, , \; \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \tag{10}$$

выполняется соотношение:

$$H(p) \leq \lambda_1 \cdot H(p_1) + \lambda_2 \cdot H(p_2) \, , \tag{11}$$

что следует из свойства аддитивности (3).

Введенная выше информационная энтропия Шеннона имеет смысл меры недостатка информации, неопределенности наших знаний (аналогично мере «хаоса» в статистической механике [17]).

В работе [1] формализм информационной энтропии был использован для выбора оптимальной схемы взаимозачетов. Очевидно, что в силу близости задач разработанный аппарат можно использовать для анализа расчетов между предприятиями внутри холдинга.

3.1. Энтропия Кульбака

При планировании и оценке работы холдинговой компании руководитель постоянно сталкивается с необходимостью принятия решений на основе выбора между двумя (или более) гипотезами. Математические основы теории принятия решений на основе статистических данных разработаны в работах [1-20], а в части методов использования принципа максимальной энтропии – в работе [21]. Изложим их, следуя работе [21].

С. Кульбак, рассматривая вопросы теории статистических выводов и достаточных статистик, ввел другое определение энтропии [17].

Пусть $(X, S, \mu_i)_{i=1,2}$ - вероятностные пространства, т.е. множество элементов $x \in X$ и совокупность S всевозможных событий, состоящих из элементов выборочного пространства X, на которых определены вероятностные меры μ_1 и μ_2. Элементы X могут быть как одномерными, так и многомерными, дискретными или непрерывными.

количественными или качественными. Пусть μ_1 и μ_2 - вероятности реализации событий в соответствии с двумя гипотезами

Предположим, что существуют функции $\rho_1(x)$ и $\rho_2(x)$, называемые плотностями вероятности, такие, что

$$0 < \rho_i(x) < \infty, \qquad i = 1,2$$

$$\mu_i(E) = \int_E \rho_i(x) \cdot dx \tag{12}$$

для всех $E \in S$.

Если H_i, i=1,2 - гипотеза о том, что X принадлежит статистической популяции с вероятностной мерой μ_i, то по теореме Байеса:

$$P(H_i|x) = \frac{P(H_i) \cdot \rho_i(x)}{P(H_1) \cdot \rho_1(x) + P(H_2) \cdot \rho_2(x)} \tag{13}$$

откуда немедленно следует

$$\ln\frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)} = \ln\frac{P(H_1|x)}{P(H_2|x)} - \ln\frac{P(H_1)}{P(H_2)} \tag{14}$$

где $P(H_i)$, i=1,2 - априорная вероятность выполнения гипотезы H_i, а $P(H_i|x)$ - апостериорная (условная) вероятность H_i при условии X=x.

Правая часть соотношения (14) представляет собой разность между логарифмами шансов в пользу гипотезы H_1 до и после наблюдения X=x. Эта разность может рассматриваться как информация, получаемая в результате наблюдения X=x. Поэтому можно определить логарифм отношения правдоподобия

$$\ln\left|\frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)}\right|$$

как информацию в точке X=x для различения в пользу гипотезы H_1 против гипотезы H_2.

Средняя информация для различения в пользу H_1 против H_2 при условии $x \in E \in S$ относительно меры μ будет определяться выражением:

$$I(1:2, E) = \frac{1}{\mu_1(E)} \cdot \int_E \ln\frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)}\, d\mu_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu_1(E)} \displaystyle\int_E \rho_1(x) \cdot \ln\frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)} \cdot dx, & \mu_1(E) > 0 \\ 0, & \mu_1(E) = 0 \end{cases} \tag{15}$$

где $d\mu_1(x) = \rho_1(x) \cdot dx$.

Когда множество E совпадает со всем выборочным пространством X, среднюю информацию от наблюдения в пользу H_1 против H_2 относительно μ_1 будем обозначать как I(1:2)

$$I(1:2) = \int \ln\frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)}\cdot d\mu_1(x) = \int \rho_1(x)\ln\frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)}\cdot dx = \int \ln\frac{P(H_1|x)}{P(H_2|x)}\cdot d\mu_1(x) - \ln\frac{P(H_1)}{P(H_2)}. \quad (16)$$

Аналогично определим среднюю информацию от наблюдения относительно μ_2 для различения в пользу H_2 против H_1:

$$I(2:1) = \int \rho_2(x)\ln\frac{\rho_2(x)}{\rho_1(x)}\cdot dx\,. \quad (17)$$

Эта величина различными авторами называется по-разному: минимумом различающей информации, относительной энтропией, числом Кульбака - Лейблера, кросс - энтропией [18].

Согласно С. Кульбаку [17] «расхождение» J (1,2) определяется как:

$$J(1:2) = I(1:2) + I(2:1) =$$
$$= \int(\rho_1(x) - \rho_2(x))\cdot\ln\frac{\rho_2(x)}{\rho_1(x)}\cdot dx = \int \ln\frac{P(H_1|x)}{P(H_2|x)}\cdot d\mu_1(x) - \int \ln\frac{P(H_1|x)}{P(H_2|x)}\; d\mu_2(x)\,. \quad (18)$$

Отметим, что «расхождение» J(1,2) симметрично относительно H_1 и H_2 и априорные вероятности $P(H_i)$, i =1,2 не входят в ее выражение. Расхождение обладает всеми свойствами расстояния (метрики). Информационные меры I(1:2) и I(2:1) можно рассматривать как направление расхождения.

Информация Кульбака обладает свойствами, схожими с информацией Шеннона:

Аддитивность. I(1:2) - аддитивная функция независимых случайных величин, т.е. для X и Y, независимых при гипотезах H_i, i =1,2:

$$I(1:2; X,Y) = I(1:2; X) + I(1:2; Y) \quad (19)$$

Если случайные величины X и Y зависимы, аддитивность имеет место для условной вероятности:

$$I(1:2; X,Y) = \int \rho_1(x,y)\ln\frac{\rho_1(x,y)}{\rho_2(x,y)}\cdot dxdy =$$
$$= \int g_1(x)\cdot\ln\frac{g_1(x)}{g_2(x)}\cdot dx + \int g_1(x)\left[\int h_1(y|x)\cdot\ln\frac{h_1(y|x)}{h_2(y|x)}\cdot dy\right] dx\,, \quad (20)$$

где

$$g_i(x) = \int \rho_i(x,y)\cdot dy; \qquad h_i(x,y) = \frac{\rho_i(x,y)}{g_i(x)}, \qquad i=1,2. \quad (21)$$

Теперь полагаем

$$I(1{:}2;Y|X=x)=\int h_1(y|x)\cdot\ln\frac{h_1(y|x)}{h_2(y|x)}\cdot dy \qquad (22)$$

$$I(1{:}2;Y|X)=\int g_1(x)\cdot I(1{:}2;Y|X=x)\cdot dx\,, \qquad (23)$$

где $I(1{:}2;Y|X=x)$ - условная информация, содержащаяся в Y для различения в пользу H_1 против H_2, если X=x, когда верна гипотеза H_1, а $I(1{:}2;Y|X)$ - среднее значение условной различающей информации $I(1{:}2;Y|X=x)$, когда верна гипотеза H_1.

Таким образом:

$$I(1{:}2;X,Y)=I(1{:}2;X)+I(1{:}2;Y|X)=I(1{:}2;Y)+I(1{:}2;X|Y) \qquad (24)$$

Кроме того, функция I(1:2) - выпуклая, обладающая свойством инвариантности и разбиениями выбора [17].

Пусть $\rho_1(x)$ и $\rho_2(x)$ -плотности распределений из множества вероятностных мер с доминирующей мерой на измеряемом пространстве (X,S). Тогда средние

$$\mu_i(E)=\int\rho_i(x)\cdot dx, \qquad E\in S\,. \qquad (25)$$

Для данной плотности распределения $\rho_2(x)$ будем искать $\rho_1(x)$ из множества вероятностных мер с доминирующей мерой, которая является «ближайшей» к вероятностной мере в смысле наименьшего значения:

$$I(1{:}2)=\int\rho_1(x)\ln\frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)}\cdot dx\,. \qquad (26)$$

Поскольку $I(1{:}2)\geq 0$ и равенство имеет место лишь если $\rho_1(x)=\rho_2(x)$, то необходимы дополнительные ограничения на $\rho_1(x)$, если мы хотим, чтобы ближайшая вероятностная мера была отличной от меры μ_2.

Потребуем, чтобы I(1:2) было минимальным при дополнительном ограничении:

$$\int T(x)\cdot\rho_1(x)\cdot dx=\Theta\,, \qquad (27)$$

где Θ - константа, а Y = T(x) - измеримая статистика.

Это требование эквивалентно минимизации функционала

$$\int\left(\rho_1(x)\cdot\ln\frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)}+\lambda_1 T(x)\rho_1(x)+\lambda_2 T(x)\rho_2(x)\right)\cdot dx\,, \qquad (28)$$

где λ_1 и λ_2 - множители Лагранжа, учитывающие условие (27) и требование нормировки, соответственно

Если обозначить через $g(x) = \dfrac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)}$, то вместо (28) получим:

$$\int \left(g(x) \ln g(x) + \lambda_1 T(x) g(x) + \lambda_2 T(x) g(x) \right) \rho_2(x)\, dx \tag{29}$$

и решение вариационной задачи будет:

$$g(x) = \exp\left\{ -\lambda_1 T(x) - \lambda_2 - 1 \right\} ; \tag{30}$$

таким образом, минимум в (28) достигается при

$$\rho_1(x) = \rho_2(x) \exp\left\{ -\lambda_1 T(x) - \lambda_2 - 1 \right\} , \tag{31}$$

откуда

$$I(1{:}2) + \lambda_2 \cdot \Theta + \lambda_1 = -\int \rho_2(x) \exp\left\{ -\lambda_1 T(x) - \lambda_2 - 1 \right\} \cdot dx . \tag{32}$$

Если положить $\tau = -\lambda_2$ и обозначить

$$M_2(\tau) = \int \rho_2(x) \exp\left\{ \tau \cdot T(x) \right\} dx , \tag{33}$$

то имеют место соотношения:

$$1 = \exp\left\{ \lambda_2 - 1 \right\} \cdot M_2(\tau) \tag{34}$$

$$I(1{:}2) = \Theta \cdot \tau - \ln M_2(\tau) , \tag{35}$$

где согласно (27)

$$\Theta = \int T(x) \cdot \rho_1(x)\, dx , \tag{36}$$

В работе [17] С. Кульбак показал, что если для произвольной плотности распределения $\rho_1(x)$ и фиксированной плотности распределения $\rho_2(x)$ из семейства вероятностных мер с доминирующей мерой при условии существования измеримой статистики $Y=T(x)$ существуют средние

$$\Theta = \int T(x) \cdot \rho_1(x) \cdot dx \tag{37}$$

$$M_2(\tau) = \int \rho_2(x) \exp\left\{ \tau \cdot T(x) \right\} \cdot dx . \tag{38}$$

для τ из некоторого интервала вещественной оси, то:

$$I(1{:}2) \geq \Theta \cdot \tau - \ln M_2(\tau) , \tag{39}$$

$$\Theta = \frac{d}{d\tau} \ln M_2(\tau) \tag{40}$$

Знак равенства имеет место только в случае

$$\rho_2(x) = \frac{\exp\{\tau \cdot T(x)\}}{M_2(\tau)} . \tag{41}$$

Говорят, что распределение $\rho_1(x)$ порождает экспоненциальное семейство распределений, т.е. семейство экспоненциального типа, определяемое распределением $\rho_2(x)$, когда τ пробегает область допустимых значений.

Экспонециниальное семейство является расширением семейства Купмена и Питмена [19,20]. Многие известные функции распределения - нормальное распределение, распределение χ^2, распределение Пуассона, биномиальное распределение, полиномиальное распределение и т.д. - являются распределениями экспоненциального типа.

В работе [17] показано, что статистика Y=T(x) является достаточной статистикой для семейства экспоненциального типа, порожденного распределением $\rho_2(x)$.

3.2. Принцип максимума информационной энтропии

Широко известно, по крайней мере, на интуитивном уровне, что распределения с большей энтропией менее упорядочены, более «гладкие», «более вероятны», что они несут меньше априорной информации согласно шенноновскому определению энтропии как меры информации, а сама энтропия определяет такую меру в пространстве распределений вероятностей. Распределения с более высокой энтропией оказываются в известном смысле более предпочтительными, чем распределения с малой энтропией.

Э.Т. Джейнс сформулировал принцип максимальной энтропии, который гласит: **если мы желаем сделать вывод на основе неполной информации, то должны опираться на такое распределение вероятностей, которое имеет максимальную энтропию, допускаемую нашей априорной информацией.**

Принцип МЭ применим к решению любой вероятностной задачи с неполными данными, независимо от того, предполагается ли многократное повторение случайного элемента или нет. Наиболее важным из его известных применений является использование в качестве критерия выбора распределения из множества возможных, согласующихся с имеющимися неполными данными.

Каким образом можно количественно оценить связь между априорной информацией о случайной величине (например, ее средним, дисперсией, другими моментами) и видом функции распределения $\rho(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$?

Такой мерой является энтропия вероятностного распределения Шеннона

$$H(p_1, p_2, \dots p_n) = -k \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \ln(p_i) \qquad (42)$$

Как уже отмечалось выше, это единственная однозначная мера неопределенности.

Если о случайной величине нет никакой дополнительной информации, то условие максимума энтропии $H(p_1, p_2, \dots, p_n)$ вместе с требованием нормировки:

$$\sum_{i}^{n} p_i = 1 \qquad (43)$$

дает оптимальное распределение $p_i = 1/n$, что вполне совпадает с качественными представлениями о неопределенности.

Пусть теперь известно среднее значение некоторой функции $f(x)$. Тогда задача поиска оптимального распределения сводится к следующей:

$$\begin{cases} H \Rightarrow \max \\ \sum p_i \cdot f(x_i) = E = \langle f(x) \rangle, \\ \sum p_i = 1 \end{cases} \qquad (44)$$

Ее решение имеет вид:

$$p_i = \exp(-\lambda - \mu \cdot f(x_i)) \qquad (45)$$

Отсюда, с учетом нормировки, получаем:

$$e^{\lambda} = \sum_{i} \exp(-\mu \cdot f(x_i)) \qquad (46)$$

где λ и μ - неопределенные множители Лагранжа.

Постоянные λ и μ могут быть определены путем замены p_i его выражением (45). Полученный результат удобно записать в форме:

$$\langle f(x) \rangle = -\frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z(\mu), \qquad (47)$$

$$\lambda = \ln Z(\mu), \qquad (48)$$

где $Z(\mu) = \sum \exp(-\mu \cdot f(x_i))$.

Очевидно, что приведенные соображения можно обобщить на любое количество функций $f(x)$, задавая ограничения в виде средних значений этих функций:

$$\langle f_r(x) \rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot f_r(x_i) \qquad (49)$$

При этом

$$Z(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = \sum_i \exp\left\{-\left[\lambda_1 \cdot f_1(x_i) + \lambda_2 \cdot f_2(x_i) + \ldots + \lambda_m \cdot f_m(x_i)\right]\right\}, \tag{50}$$

а распределение, соответствующее максимальной энтропии, будет:

$$p_i = \sum_i \exp\left\{-\left[\lambda_0 + \lambda_1 \cdot f_1(x_i) + \lambda_2 \cdot f_2(x_i) + \ldots + \lambda_m \cdot f_m(x_i)\right]\right\}; \tag{51}$$

где, как и прежде,

$$\langle f_r(x) \rangle = -\frac{\partial}{\partial \lambda_r} \ln Z \tag{52}$$

$$\lambda_0 = \ln Z\ . \tag{53}$$

Энтропия этого распределения будет равна:

$$H_{\max} = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot \langle f_1(x) \rangle + \ldots + \lambda_m \cdot \langle f_m(x) \rangle, \tag{54}$$

где положено k = 1.

Флуктуации $f_r(x)$ находятся следующим образом:

$$\Delta^2 f_r(x) = \langle f_r^2 \rangle - \langle f_r \rangle^2 = \frac{\partial^2}{\partial \lambda_r^2} (\ln Z) \tag{55}$$

Если в дополнение к зависимости от x функции f_r зависят от параметров α_1, α_2, то принцип максимальной энтропии дает:

$$\left\langle \frac{\partial f_r}{\partial \alpha_k} \right\rangle = -\frac{1}{\lambda_r} \frac{\partial}{\partial \alpha_k} (\ln Z) \tag{56}$$

Другой подход к определению энтропии, принятый в статистической механике [16], заключается в следующем.

Пусть t_{ij} - величина, характеризующая связь между элементами (состояниями) i и j системы, $\sum_{ij} t_{ij} = T$. Тогда число способов реализации распределения $\{ t_{ij} \}$ будет:

$$W(\{t_{ij}\}) = \frac{T!}{\prod_{ij} t_{ij}!} \tag{57}$$

и энтропия системы определяется как логарифм числа способов реализации состояния системы:

$$H = \ln W. \tag{58}$$

Как отметил Э.Т. Джейнс в работе [7], основная разница между этими двумя определениями соответствует разнице между субъективным и объективным взглядами на вероятность. Объективная точка зрения состоит в том, что вероятность можно измерить, наблюдая частоту событий в случайном эксперименте; субъективная точка зрения рассматривает вероятность как выражение человеческого незнания, следовательно, вероятность события представляет собой попросту формальное выражение основанных на имеющейся информации ожиданий, что событие произойдет или уже произошло.

С субъективной точки зрения цель теории вероятностей заключается в том, чтобы помочь получить правдоподобные прогнозы, когда мы не располагаем информацией, достаточной для однозначных выводов. В силу этих соображений проверка «хорошего» субъективного распределения вероятностей заключается в том, чтобы установить, насколько оно соответствует нашим знаниям величины $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

3.3. Холдинг как механизм понижения информационно – экономической энтропии квазизамкнутой экономической системы

Изложенные выше (в духе [21]) основы теории вероятностных мер и формализма информационной энтропии, на наш взгляд, весьма точно отражают многие аспекты функционирования экономики. Например, точка зрения любого экономически активного субъекта на целесообразность той или иной деятельности формируется на основе правдоподобных прогнозов в том случае, когда он не располагает информацией, достаточной для однозначных выводов (принятия решений).

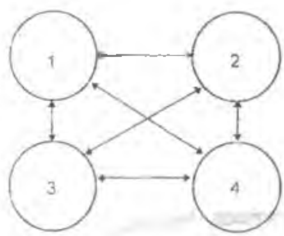
Объективная же картина сложной системы экономических взаимоотношений, в конечном счете, допускает количественную оценку на основе измерения вероятности. Это измерение, как в экономике, так и в математической статистике, производится методом наблюдения частоты соответствующих экономических или математических событий в некотором псевдослучайном эксперименте

Строго говоря, любой экономический эксперимент не является полностью случайным. Но в условиях большой статистики разнообразных сделок, характерной для рыночной экономики, отдельные количественные показатели, взятые по результатам деятельности большой группы предприятий, образуют множество псевдослучайных чисел.

Для того, чтобы пояснить основную идею подхода, рассмотрим конкретный пример. Работа каждой фирмы, концерна, компании и т.д. характеризуется многими показателями (величина основного капитала, величина оборотного капитала, портфель кредитов, если речь идет о банке и т.п.). Рассмотрим один из этих показателей.

например, баланс (сальдо). Если взять пятьдесят (или сто, двести, ...) юридических лиц, то квартальный или годовой баланс каждого из них выражается в рублях, то есть является числом. Для каждого из упомянутых предприятий это число является показателем конкретной экономической деятельности и является в достаточной степени детерминированным (например, квалификацией руководителя или конъюнктурой рынка). Для внешнего же наблюдателя совокупность (множество) этих балансов представляет псевдослучайную выборку.

Для квалиметрических оценок состояния рынка, в принципе, требуется достаточно сложная система многоуровневых экспертиз. Однако для интегральной макроэкономической оценки состояния дел и прогнозирования вероятности быстрого и успешного разрешения конфликта достаточно рассмотрение задачи в приближении информационной энтропии. Формальный аппарат для решения подобных задач полностью изложен выше, однако, он нуждается в конкретизации применительно к проблеме взаимных расчетов между субъектами квазизамкнутой экономической системы. Следуя работе [1], рассмотрим квазизамкнутую систему, состоящую из N предприятий. Перенумеруем эти предприятия и графически изобразим эту систему:



На рисунке каждое предприятие изображено в виде круга, в центре которого проставлено число - условный номер предприятия. Стрелками изображены взаимоотношения между субъектами экономической деятельности. Эти отношения, в конечном счете, сводятся к обмену ресурсами, фондами, кадрами, информацией, продукцией и деньгами. Хорошо известно, что в любой экономической ситуации обмен различными видами товаров и услуг и проводка соответствующих платежей происходит за конечное время. Определенное время запаздывания платежей имеется и в системе взаиморасчетов. В течение этого времени предприятие за номером i может оказаться должником предприятия j.

Обозначим через N полное число предприятий, образующих квазизамкнутую группу, через D_{ij} - долг предприятия i предприятию j, а через τ_{ij} -время задержки платежа. Очевидно, что кризис неплатежей наступает если число предприятий достаточно велико ($N>N_0$), а среднее время задержки платежа больше некоторого критического ($\langle\tau\rangle \geq \tau_0$).

Долг предприятия в любом случае имеет рублевый (долларовый) эквивалент, даже если возник в результате бартерной сделки или предоставления товарного кредита. Величина этого долга и время задержки платежа являются псевдослучайными числами, подлежащими осмыслению в настоящей работе в рамках изложенной концепции.

Покажем, что информационная энтропия имеет практически одинаковую интерпретацию в экономике, в статистической физике и в информатике.

Для этого, следуя работе [1], введем понятие нормированного платежа.

Предположим, что в процессе проведения взаимозачетов необходимо произвести M задержанных платежей G_k, так что

$$\sum_{k=1}^{M} G_k = G.$$

Нормированным платежом мы назовем отношение

$$P_i = \frac{G_i}{G}.$$

Очевидно, что нормированные платежи обладают всеми классическими свойствами вероятности. В каждый данный момент они образуют полное множество. Мера полного множества равна единице. Нормированные платежи обладают свойством аддитивности. То есть, если платежи являются независимыми, то мера любого подмножества платежей является суммой мер (отдельных нормированных платежей). Таким образом, нормированные платежи обладают всеми признаками классической вероятности (или частоты) элементарного случайного исхода.

В данном случае нет особой необходимости останавливаться на различиях между теорией вероятности и математической статистикой. Для нас существенным является только то, что на множестве случайных исходов (нормированных платежей) можно построить множество случайных событий (подпространств взаиморасчетов) и ввести на нем энтропийную меру

Рассмотрим несколько предельных, не реализуемых на практике случаев.

1. N=1
2. N=2
3. N=3
4. $N = \infty$

Очевидно, что при N=1 информационная энтропия равна нулю. В самом деле, одно предприятие по определению не может задолжать самому себе. Следовательно, в этом случае M=0. Мера пустого множества (в данном случае энтропия Шеннона) по определению равна нулю.

С формальной точки зрения этот результат получается следующим образом. Нормированный платеж равен нулю ($p_0=0$) и, следовательно:

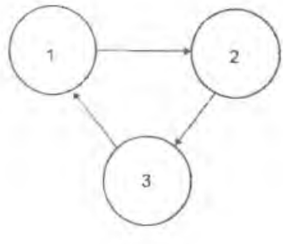
$$H = -k \cdot \sum_{i=0}^{M=0} p_i \cdot \ln(p_i) = 0 \cdot \ln(0) = 0$$

Этот результат допускает четкую интерпретацию - система задержанных нормированных платежей является полностью упорядоченной. Энтропия равна нулю. Информационный (платежный) хаос в системе полностью отсутствует.

Рассмотрим следующий тривиальный случай N=2. Если одно предприятие должно другому предприятию сумму G, то в этом случае мера полного множества равна единице и энтропия снова равна нулю. Проблемы взаимозачета не существует. Решение вопроса о взыскании долга происходит через арбитражный суд или сводится к признанию банкротства должника.

При увеличении числа предприятий, входящих в квазизамкнутую группу, энтропия возрастает. Например, уже при N=3 в системе имеется минимум 3 задержанных платежа. В самом деле. Из комбинаторных соображений ясно, что любые парные экономические взаимодействия между N предприятиями приводят к возникновению $M = \frac{N \cdot (N-1)}{2}$ обобщенных отношений платежа. Указанное число M получено в предположении, что если предприятие i задолжало предприятию j по нескольким сделкам, то в схему включается один суммарный долг.

В этой схеме при N=3 обобщенная величина M=3, независимо от времени задержки платежа и величины долга. В частности, возможен случай, когда время задержки платежа нулевое или долги отсутствуют. На рисунке изображена одна из возможных схем взаиморасчетов между тремя предприятиями.



Каждая стрелка на этом рисунке обозначает обобщенный задержанный платеж

Для простоты при вычислении информационной энтропии рассмотрим тривиальный случай $G_1 = G_2 = G_3$ и положим коэффициент k=1. Тогда

$$H = \ln(3),$$

причем это значения является максимальным согласно свойству 2 энтропии Шеннона. При проведении частичных взаиморасчетов соотношение $G_1 = G_2 = G_3$ нарушается и энтропия начинает убывать. Но, строго говоря, задача экономиста в том и состоит, чтобы уменьшить хаос (энтропию) в системе взаиморасчетов между предприятиями.

Совершенно аналогично вычисляется максимальное возможное значение энтропии $H_{max}(N)$ для системы взаимных расчетов между N предприятиями, образующими квазизамкнутую группу:

$$H_{max}(N) = \ln\left[\frac{N \cdot (N-1)}{2}\right].$$

Отсюда немедленно следует, что максимальная информационная энтропия системы взаиморасчетов логарифмически растет при увеличении числа предприятий N, входящих в квазизамкнутую группу. Таким образом, с ростом числа задержанных платежей хаос в системе нарастает.

Равномерное распределение вероятностей (нормированных задержанных платежей) никогда не реализуется на практике. Наиболее правдоподобными с практической точки зрения выглядят нормальный закон распределения и распределение Пуассона. Распределение, имеющее наибольшую энтропию при заданной дисперсии, является нормальным. Однако нормальный закон распределения в классической формулировке пригоден для описания непрерывных случайных величин, в то время как система задержанных платежей - это случайная выборка из некоторой генеральной совокупности.

В связи с этим наиболее привлекательными выглядят следующие два подхода, соответствующие объективистскому и субъективистскому взглядам на природу вероятностных мер.

1) Использование усеченного пуассоновского распределения

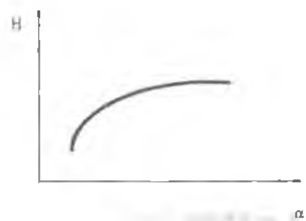
$$p_i = \frac{\alpha^i \cdot e^{-\alpha}}{i!},$$

имеющего математическое ожидание и дисперсию, равные α.

Распределение Пуассона, строго говоря, справедливо для случая $N = \infty$. Однако для не слишком больших значений α сходимость нормировочного соотношения

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

наступает достаточно быстро и распределение вполне пригодно для описания системы, содержащей конечное число N элементарных исходов. Совершенно очевидно, что с ростом α (то есть дисперсии и математического ожидания распределения Пуассона) энтропия растет.



2)Использование типичного для математической статистики подхода, когда совокупность чисел p_i рассматривается как случайная выборка. Она характеризуется выборочным средним $\langle p \rangle = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^{M} p_i$ и несмещенной выборочной дисперсией $S^2(p) = \frac{1}{M-1} \cdot \sum_{i=1}^{M} (p_i - \langle p \rangle)^2$. Для оценочных энтропийных расчетов эти величины можно использовать, предполагая, что соответствующая непрерывная случайная величина p распределена по нормальному закону. В этом случае $H(p) \approx \ln[\sqrt{2\pi \cdot e \cdot S^2(p)}]$. Приближенное равенство становится точным только в том случае, когда распределение является нормальным, а объем выборки - бесконечным.

Совершенно очевидно, что энтропия Шеннона логарифмически возрастает при увеличении выборочной дисперсии.

В работе [1] энтропийная идеология оценки функционирования экономических систем была приложена к проблеме взаиморасчетов между предприятиями, входящими в квазизамкнутую экономическую систему в условиях кризиса неплатежей. В этой работе было доказано, что проведение частичных взаимозачетов уменьшает объем N квазизамкнутой группы предприятий и, тем самым, снижает уровень хаоса в системе экономических взаимоотношений. Наиболее эффективен результат тогда, когда стартовая группа (до взаимозачета) состоит из большого числа N предприятий и находится в закольцованной системе (1 должен 2, 2 должен 3, ..., N должен 1) задержанных платежей, приблизительно равных по величине. В рамках холдинговой компании взаимозачеты осуществляются решением руководства холдинга. Следовательно, экономический хаос в такой системе является минимальным при условии разумной экономической политики дирекции. Отсюда вытекает очевидный вывод: в условиях экономического хаоса и кризиса неплатежей холдинг является оптимальной формой организации экономической деятельности.

Заключение

Резюмируем вышесказанное следующим образом.

1. Предложенный в работе [1] энтропийный формализм интегрального статистического оценивания применен для анализа эффективности работы холдинга.
2. Показано, что информационная энтропия может служить мерой хаоса в системе взаиморасчетов между субъектами экономической деятельности, входящими в холдинг, состоящий из N предприятий.
3. Доказано, что максимум информационной энтропии доставляет равномерное распределение нормированных задержанных платежей.
4. Продемонстрировано, что с ростом N логарифмически возрастает максимальная информационная энтропия системы.
5. Представляется интересным построить математическую модель холдинга, учитывающую возможность обмена ресурсами между входящими в холдинг предприятиями с целью гашения амплитуды экономических циклов. На базе

подобной модели можно реализовать программу среднесрочного планирования деятельности холдинговой компании

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Г. Засканов, Н.И. Кутиков, Ю.Л. Ратис. Модели и алгоритмы оценки эффективности мероприятий организации взаиморасчетов, «Рыночная экономика». Сб. трудов отделения экономики РАН, Самара, 1998.
2. Fisher R.A. Theory of statistical estimation // Proc. Camb. Phil. Soc., 1925,**22**, p.700-725.
3. Fisher R.A. Contribution to Mathematical Statistics. - John Wiley @ Sons, N.Y., 1950. p.35
4. Фишер Р.А. Статистические методы для исследователей. - Гостехиздат, 1958.
5. Шеннон К.Э. Работы по теории информации и кибернетике. -М., ИЛ. 1963 Математическая теория связи. 827 с.
6. Винер Н. Кибернетика.- М.: ИЛ. 1960.
7. Jaynes E.T. Information Theory and Statistical Mechanics // Phys.Rev., 1957, **106**. №4. p.620-630; Phys. Rev., 1957. **108**. №2, p.171-190.
8. Jaynes E.T. Prior probabilities // IEEE Trans.. 1968. Syst.Sci. Cybern.. SSC-4. p.227-241
9. Jaynes E.T. Where do we stand on maximum entropy? // The Maximum Entropy Formalism. R.D.Levine and M.Tribus. Eds. Cambridge, MA: MIT Press, 1978, p.15-118.
10. Jaynes E.T. The maximum entropy principle // Annual Review of Physical Chemistry. 1980. **31**, p.579-601.
11. Van Campenhout J.M., Cover T.M. Maximum Entropy and Conditional Probability // IEEE Trans. on Inf. Theory. 1981. IT-27. №4. p.483-489.
12. Джейнс Э.Т. О логическом обосновании методов максимальной энтропии // ТИИЭР. 1982. **70**, №9, с.33-51.
13. Burg J.P. Maximum Entropy Spectral Analysis // Proc. 37th Meet. Soc. Exploration Geophysicists. 1967; Stanford Thesis. 1975; Maximum Entropy Spectral Analysis, Ph.D. Dissertation, Stanford Univ., Stanford, MA, 1975.
14. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.:Мир. 19736 469 с.
15. Wehrl A. General properties of entropy // Rev. of Modern Phys., 1978. **50**. №2. p.221-259.
16. Бриллюэн Л. Наука и теория информации. - М.:ГИФМЛ. 1960. 392 с.
17. Кульбак С. Теория информации и статистика. - М.: Наука, 1967. 408 с

18. Shore J.E., Johnson R.W. Axiomatic derivation of principle of maximum entropy and the principle of minimum cross-entpopy. // IEEE Trans. on Inf. Theory, 1980, **IT-26**, p.26-37.

19. Pitman E.J.G Sufficient statistics and intrinsic accuracy // Proc. Camb. Phil. Soc., 1936, **32**,p.567-576.

20. Koopman B.O. On distribution admitting a sufficient statistics // Trans. Math. Soc., 1936, **39**.

21. Арагский Д.Б., Леонтьев Е.А., Морозов О.А., Солдатов Е.А., Фидельман В.Р., Информационно – оптимальные методы в физике и обработке экспериментальных данных // Монография под редакцией В.Р. Фидельмана. – Н. Новгород: Издательство ННГУ, 1992. – 146 с.

22. Б.Г.Айвазян, Ю.Л. Ратис, Холдинг в условиях экономики переходного периода Динамический подход. В печати.