А. Д. Бойков, С. Ф. Ледяев

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ МНОГОМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

В работе рассматриваются спектральные методы определения функций чувствительности многомерных линейных нестационарных систем на основе понятия параметрических передаточных функций.

Многомерная линейная динамическая система с r входами и одним выходом выражается дифференциальным уравнением

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu}(t) \frac{d^{\nu} x}{dt^{\nu}} = \sum_{j=1}^{r} \sum_{\eta=0}^{m} b_{j\eta}(t) \frac{d^{\eta} y_j}{dt^{\eta}}, \tag{1}$$

где $y_j(t)$ и $x(t)$ — соответственно входной и выходной сигналы.

На практике довольно широко распространены системы, переменные параметры которых описываются экспоненциальными или полиномиальными рядами:

$$\text{а)}\quad a_{\nu}(t) = \sum_{k=0}^{N} a_{\nu k} e^{-kt}, \qquad b_{j\eta}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_{\eta kj} e^{-kt}, \tag{2}$$

$$\text{б)}\quad a_{\nu}(t) = \sum_{k=0}^{N} a_{\nu k} t^{t}, \qquad b_{j\eta}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_{\eta kj} t^{k}. \tag{3}$$

Известно, что детерминированный и статистический анализ нестационарных систем удобно производить на основе параметрических передаточных функций [2], [6]. Поэтому определению этих функций уделяется серьезное внимание.

В работах [2], [4], [5] разрабатывается метод последовательных приближений для определения передаточных функций. Однако иногда удобнее находить параметрические передаточные функции в виде двумерного ортогонального ряда по методу, изложенному в работе [7].

При известных параметрических передаточных функциях динамической системы (1) детерминированный и статистический анализ производится на основе следующих выражений:

$$X(s, t) = \sum_{j=1}^{r} W_j(s, t) Y_j(s),$$

$$M_x(s, t) = \sum_{j=1}^{r} W_j(s, t) M_y(s),$$

$$R_{xx}(s_1, s_2, t) = \sum_{j_1=1}^{r} \sum_{j_2=1}^{r} W_{j_1}(s, t) W_{j_2}(s, t) R_{y_{j_1} y_{j_2}}(s_1, s_2).$$

Рассмотрим случай, когда некоторые из коэффициентов $a_{\nu k}$, $b_{\eta kj}$ (в общем случае все коэффициенты) зависят от параметра α, который может иметь различные физические значения.

Определим функции чувствительности произвольного порядка по параметру α детерминированных и статистических характеристик выходного сигнала многомерной нестационарной системы:

$$U_x^{(q)}(t) = \frac{\partial^q x(t, \alpha)}{\partial \alpha^q},$$

$$U_{m_x}^{(q)}(t) = \frac{\partial^q m_x(t, \alpha)}{\partial \alpha^q},$$

$$U_{R_{xx}}^{(q)}(t_1, t_2) = \frac{\partial^q R_{xx}(t_1, t_2, \alpha)}{\partial \alpha^q},$$

где $x(t, \alpha)$ — выходной сигнал, $m_x(t, \alpha)$ — математическое ожидание выходного случайного сигнала, $R_{xx}(t_1, t_2, \alpha)$ — автокорреляционная функция выходного нестационарного случайного процесса.

Функции чувствительности в области комплексных переменных s_1, s_2 согласно вышеприведенным формулам:

$$U_x(s, t) = \frac{\partial X(s, t, \alpha)}{\partial \alpha} = \sum_{j=1}^{r} V_j(s, t) Y_j(s),$$

$$U_{m_x}(s, t) = \frac{\partial M_x(s, t, \alpha)}{\partial \alpha} = \sum_{j=1}^{r} V_j(s, t) M_{yj}(s),$$

$$U_{R_{xx}}(s, t) = \frac{\partial R_{xx}(s_1, s_2, \alpha)}{\partial \alpha} = \sum_{j_1=1}^{r} \sum_{j_2=1}^{r} [V_{j_1}(s, t, \alpha) W_{j_2}(s, t, \alpha) +$$
$$+ W_{j_1}(s, t, \alpha) V_{j_2}(s, t, \alpha)] R_{y_{j_1} y_{j_2}}(s_1, s_2),$$

где функции $V_j(s, t) = \dfrac{\partial W_i(s, t, \alpha)}{\partial \alpha}$ назовем параметрическими передаточными функциями чувствительности.

Для функций чувствительности высших порядков справедливы выражения

$$U_x^{(q)}(s, t) = \frac{\partial^q X(s, t, \alpha)}{\partial \alpha^q} = \sum_{j=1}^{r} V_j^{(q)}(s, t) Y_j(s), \tag{4}$$

$$U_{m_x}^{(q)}(s, t) = \frac{\partial^q M_x(s, t, \alpha)}{\partial \alpha^q} = \sum_{j=1}^{r} V_j^{(q)}(s, t) W_{y_j}(s), \tag{5}$$

$$U_{R_{xx}}^{(q)}(s_1, s_2, t) = \frac{\partial^q R_{xx}(s_1, s_2, \alpha)}{\partial \alpha^q} = \sum_{j_1=1}^{r} \sum_{j_2=1}^{r} \Big[V_{j_1}^{(q)} W_{j_2} + q V_{j_1}^{(q-1)} V_{j_2} +$$

$$+\frac{q(q-1)}{2}V_{j_1}^{(q-2)}V_{j_2}^{(2)}+\ldots+W_{j_1}V_{j_2}^{(q)}\Big]R_{y_{j_1}y_{j_2}}(s_1, s_2), \qquad (6)$$

где функции $V_j^{(q)}(s, t)=\frac{\partial^{(q)}W_j(s, td)}{\partial\alpha^q}$ — параметрические передаточные функции чувствительности «$q^{\text{го}}$» порядка.

Таким образом, для определения функций чувствительности характеристик выходного сигнала необходимо знать параметрические передаточные функции чувствительности.

Рассмотрим методы определения передаточных функций чувствительности. Если коэффициенты уравнения (1) описываются экспоненциальными рядами (2), то параметрические передаточные функции $W_j(s, t)$ определяются из выражения [7]

$$\sum_{k=0}^{N}A_k(s, p, \alpha)W_j(s, p+k, \alpha)=B_j(s, p+k, \alpha), \qquad (7)$$

где

$$A_k(s, p, \alpha)=\sum_{\nu=0}^{n}A_{\nu k}(s, \alpha)(p+k)^{\nu},$$

$$A_{\nu k}(s, \alpha)=\frac{1}{\nu!}\frac{d^{\nu}A_{0k}(s, \alpha)}{ds^{\nu}},$$

$$A_{0k}=s^n a_{nk}(\alpha)+\ldots+s^2a_{2k}(\alpha)+sa_{1k}(\alpha)+a_{0k}(\alpha),$$

$$B_j(s, p+k, \alpha)=s^m\sum_{k=0}^{M}\frac{b_{mkj}(\alpha)}{p+k}+s^{m-1}\sum_{k=0}^{M}\frac{b_{m-1,k,j}(\alpha)}{p+k}+\ldots$$

$$\ldots+\sum_{k=,}^{M}\frac{b_{j,0k}(\alpha)}{p+k}.$$

Дифференцируя выражения (7) по параметру α, получим

$$\sum_{k=0}^{N}\left[\frac{\partial A_k(s, p, \alpha)}{\partial\alpha}W_j(s, p+k, \alpha)+A_k(s, p, \alpha)\frac{\partial W_j(s, p+k, \alpha)}{\partial\alpha}\right]=$$

$$=\frac{\partial B_j(s, p+k, \alpha)}{\partial\alpha}. \qquad (8)$$

Функции $W_j(s, t)$ и $V_j(s, t)$ определяются в виде двумерных ортогональных рядов

$$W_j(s, t)=\sum_{i_1=0}^{n}\sum_{i_2=0}^{n}C^j_{i_1 i_2}\Phi_{i_1}(s)\varphi_{i_2}(t), \qquad (9)$$

$$V_j(s, t)=\sum_{i_1=0}^{n}\sum_{i_1=0}^{n}g^j_{i_1 i_2}\Phi_{i_1}(s)\varphi_{i_2}(t) \qquad (10)$$

путем совместного решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{N} A_k(s,\ p,\alpha)\sum_{i_1=0}^{n}\ \sum_{i_2=0}^{n} C^{j}_{i_1 i_2}\Phi_{i^1}(s)\,\Phi_{i_2}(p+k)=B_j(s,\ p+k,\ \alpha)\\&\sum_{k=0}^{N}\left[\frac{\partial A_k(s,\ p,\ \alpha)}{\partial\alpha}\right]\sum_{i_1=0}^{n}\sum_{i_2=0}^{n} C^{j}_{i_1 i_2}\Phi_{i_1}(s)\,\Phi_{i_2}(p+k)+\\&+A_k(s,p,\alpha)\sum_{i_1=0}^{n}\sum_{i_2=0}^{n} g^{j}_{i_1 i_2}\Phi_{i_1}(s)\,\Phi_{i_2}(p+k)\Big]=\frac{\partial B_j(s,\ p+k,\alpha)}{\partial\alpha},\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

где $\Phi_i\ (s)$ и $\Phi_i\ (p)$ — преобразование по Лапласу ортогональных функций $\varphi_i\ (\tau)$, $\varphi_i\ (t)$.

Для решения системы уравнений (11) комплексным переменным придают целые действительные значения $S=1,\ 2,\ 3,\ldots$; $p=1,\ 2,\ 3,\ldots$, (если $R_e s<1$, $R_e p<1$). Полученные z систем неоднородных алгебраических уравнений решают относительно неизвестных коэффициентов

$$C^{j}_{i_1 i}\ ,\ \ g^{j}_{i_1 i}\ (j=1,\ 2,\ldots r).$$

Если коэффициенты дифференциального уравнения (1) описываются полиномиальными рядами (3), то параметрические передаточные функции определяются из выражения

$$\sum_{k=0}^{N} A_k(s,\ p,\ \alpha)\,\frac{d^k}{dp^k}\ w_j(s,\ p,\ \alpha)=B_j(s,\ p,\ \alpha),\qquad(12)$$

где

$$A_0(s,\ p,\ \alpha)=\overline{A}_0(s,\ p,\ \alpha)-\overline{A}_1^{(1)}(s,\ p,\ \alpha)+\ \ldots\ +(-1)^N A_N^{(N)},$$

$$A_1(s,\ p,\ \alpha)=-A_1(s,\ p,\ \alpha)+2\overline{A}_2^{(1)}(s,\ p,\ \alpha)-\ldots+(-1)^N C_N^{(N-1)}\times$$
$$\times\overline{A}_N^{(N-1)}(s,\ p,\ \alpha)$$

. . . .

$$A_N(s,\ p,\ \alpha)=(-1)^N\overline{A}_N(s,\ p,\ \alpha),$$

$$\overline{A}_l^{(k)}=\frac{d^k}{dp^k}\left[a_{nl}(\alpha)\,p^n+a_{n-1,\,l}(\alpha)\,p^{n-1}+\ldots+a_{ol}(\alpha)\right],$$

$$B_j(s,\ p,\ \alpha)=L_p\left\{b_{jm}(t,\ \alpha)\,s^m+b_{j,\,m-1}(t,\ \alpha)\ s^{m-1}+\ldots+b_{jo}(t,\ \alpha)\right\}.$$

Дифференцируя выражение (12) по параметру α, получим

$$\sum_{k=0}^{N}\left[\frac{\partial A_k(s,\ p,\ \alpha)}{\partial\alpha}\ \frac{d^k}{dp^k}\,w_j(s,\ p,\ \alpha)+A_k(s,\ p,\ \alpha)\,\frac{d^k}{dp^k}\,V_j(s,\ p,\ \alpha)\right]=$$
$$=\frac{\partial B_j(s,\ p,\ \alpha)}{\partial\alpha},$$

Функции $W_j(s, t)$ и $V_j(s, t)$ определяются в виде двумерных ортогональных рядов (9) и (10) совместным решением системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{N} A_k(s, p, \alpha) \sum_{i_1=0}^{n} \sum_{i_2=0}^{n} C^j_{i_1 i_2} \Phi_{i_1}(s)\, \alpha^k_{i_2}(p) = B_j(s, p, \alpha),\\
&\sum_{k=0}^{N} \Bigg[\frac{\partial A_k(s, p, \alpha)}{\partial \alpha} \sum_{i_1=0}^{n} \sum_{i_2=0}^{n} C^j_{i_1 i_2} \Phi_{i_1}(s)\, \alpha^k_{i_2} + A_k(s, p, \alpha) \times\\
&\times \sum_{i_1=0}^{n} \sum_{i_2=0}^{n} g^j_{i_1 i_2} \Phi_{i_1 i_2}(s)\, \alpha^k_{i_2}(p)\Bigg] = \frac{\partial B_j(s, p, \alpha)}{\partial \alpha},
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

где

$$\alpha^k_{i_2}(p) = \int_0^\infty t^k \varphi_{i_2}(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

Для определения параметрических передаточных функций чувствительности до q порядка включительно составляется система уравнений q порядка, а именно

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N} A_k \sum_{i_1=0}^{n} \sum_{i_2=0}^{n} C^j_{i_1 i_2} \Phi_{i_1}(s)\, \Phi_{i_2}(p+k) = B_j,\\
&\sum_{k=0}^{N} \Bigg[\frac{\partial A_k}{\partial \alpha} \sum_{i_1=0}^{n} \sum_{i_2=0}^{n} C^j_{i_1 i_2} \Phi_{i_1}(s)\, \Phi_{i_2}(p+k) +\\
&+ A_k \sum_{i_1=0}^{n} \sum_{i_2=0}^{n} g^j_{i_1 i_2} \Phi_{i_1}(s)\, \Phi_{i_2}(p+k)\Bigg] = \frac{\partial B_j}{\partial \alpha}\\
&\sum_{k=0}^{N} \Bigg[\frac{\partial^q A_k}{\partial \alpha^q} \sum_{i_1=0}^{n} \sum_{i_2=0}^{n} C^j_{i_1 i_2} \Phi_{i_1}(s)\, \Phi_{i_2}(p+k) + q\, \frac{\partial^{q-1} A_k}{\partial \alpha^{q-1}} \sum_{i_1=0}^{n} \sum_{i_2=0}^{n} \times\\
&\times g^j_{i_1 i_2} \Phi_{i_1}(s)\, (\Phi)_{i_2}(p+k) + \frac{q(q-1)}{2} \frac{\partial^{q-2} A_k}{\partial \alpha^{q-2}} \sum_{i_1=0}^{n} \sum_{i_2=0}^{n} g^{j(2)}_{i_1 i_2} \Phi_{i_1} \times\\
&\times \Phi_{i_2} + \ldots + A_k \sum_{i_1=0}^{n} \sum_{i_2=0}^{n} g^{j(q)}_{i_1 i_2} \Phi_{i_1} \Phi_{i_2}\Bigg] = \frac{\partial^q B_j}{\partial \alpha^q},
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

где $g_{i_1 i_2}{}^{j(q)}$ — коэффициенты ортогонального разложения параметрической функции чувствительности q порядка.

Аналогичная система уравнений составляется для нестационарной динамической системы с полиномиальными коэффициентами.

Задаваясь целыми действительными значениями комплексных переменных s и p получим $ч$ систем неоднородных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $C_{i_1 i_2}{}^j$, $g_{i_1 i_2}{}^j$, $g_{i_1 i_2}{}^{j(q)}$ ($j = 1, 2, 3, \ldots,$ r), при решении которых определим параметрические передаточные функции и передаточные функции чувствительности до $q^{го}$ порядка включительно по каждому из r каналов многомерной нестационарной системы.

Определив функции $W_j(s, t)$, $V_j(s, t), \ldots, V_j^q(s, t)$ $(j=1; 2; \ldots; r)$ и зная детерминированные и статистические характеристики входных сигналов, можно легко найти функции чувствительности (4), (5), (6). Переход в область действительного аргумента t осуществляется методом обобщенных спектров [1], [6].

Искомые функции чувствительности определяются в виде разложения по ортогональным рядам

$$U_x^{(q)}(t) = \sum_{i=0}^{n} C_i^q \varphi_i(t),$$

$$U_{mx}^{(q)}(t) = \sum_{i=0}^{n} \bar{C}_i^q \varphi_i(t),$$

$$U_{R_{xx}}^{(q)}(t_1 t_2) = \sum_{i_1=0}^{n} \sum_{i_2=0}^{n} G_{i_1 i_2}^q \varphi_{i_1}(t_1) \varphi_{i_2}(t_2).$$

Для оптимального управления методами теории чувствительности [8], [9] необходимо вычислять функции чувствительности выходного процесса к управляющим параметрам.. Пусть в формуле (1) входные воздействия $y_j(t, u_{ij})$ являются управляющими функциями времени, зависящими от управляющих параметров u_{ij}.

Функции чувствительности выходного процесса от управляющих параметров u_{ij} в области комплексного переменного имеют вид

$$U_{x, u_{ij}}^{(k)}(s, t) = \frac{\partial^k X(s, t, u_{ij})}{\partial u_{ij}^k} = W_j(s, t) \frac{\partial^k Y_j(s, u_{ij})}{\partial u_{ij}^k}.$$

Отсюда видно, что для определения функций чувствительности по управляющим достаточно знать параметрические передаточные функции и управляющие функции $y_i(t, u_{ij})$. Переход в область действительного переменного t осуществляется методом обобщенных спектров.

Таким образом, в работе рассмотрен спектральный метод определения функций чувствительности детерминированных и статистических характеристик выходного сигнала многомерной нестационарной системы. Введено понятие параметрических передаточных функций чувствительности многомерных нестационарных систем.

Параметрические передаточные функции чувствительности, один раз определенные для исследуемой системы, дают возможность проводить анализ чувствительности при любых детерминированных и случайных (стационарных и нестационарных) входных воздействиях без решения дифференциальных уравнений чувствительности.

Алгоритмы вычисления параметрических передаточных функций чувствительности, а также алгоритмы анализа чувствительности при конкретных входных воздействиях хорошо реализуются на цифровых вычислительных машинах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Солодовников В. В., Дмитриев А. Н., Егупов Н. Д., Ортогональный метод анализа и синтез линейных систем автоматического управления на основе понятия моментов. Сб. «Автоматическое управление и вычислительная техника», вып. 8, «Машиностроения», 1968.
2. Солодов А. В., Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами, М., Физматгиз, 1962.
3. Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М., Чувствительность систем автоматического управления, Л., изд. «Энергия», 1969.
4. Бойков А. Д., Дмитриев А. Н., Егупов Н. Д., Ледяев С. Ф. Приближенный метод определения передаточных функций нестационарных систем с полиномиальными и экспоненциальными коэффициентами. Труды ВНИИЦЕММАШ, вып. XIII, Тольятти, 1972.
5. Бойков А. Д., Егупов Н. Д., Ледяев С. Ф. Приближенный метод определения передаточных функций нестационарных систем с периодическими коэффициентами. Труды КуАИ, вып. 50, Куйбышев, 1972.
6. Бойко А. Д., Ледяев С. Ф., Детерминированный анализ многомерных нестационарных систем на основе параметрических передаточных функций. Труды УПИ, том 8, вып. 2. Ульяновск, «Приборостроение», 1971.
7. Бойков А. Д., Ледяев С. Ф., Определение параметрических передаточных и импульсных переходных функций многомерных систем с экспоненциальными коэффициентами. Труды УПИ, том VIII, вып. III, Ульяновск, Радиотехника, 1972.
8. Бойков А. Д., Гришанов Г. М. Методы теории чувствительности в задачах оптимального управления технологическими объектами. Пятое Всесоюзное Совещание по проблемам управления (Москва, 1971 г.). Рефераты докладов, часть I. М., изд. «Наука», 1971.
9. Бойков А. Д., Гришанов Г. М. Оптимальное управление процессами методами теории чувствительности, Труды Республиканской научной конференции «Автоматическое управление технологическими процессами в различных отраслях народного хозяйства», «Алгоритмизация и автоматизация процессов и установок», вып. 3, Куйбышев, 1970.

И. А. Вакарин, В. С. Демашов, В. П. Кузнецов, Е. П. Чураков

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ОЦЕНКЕ КООРДИНАТ ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА ПО СОВОКУПНОСТИ МГНОВЕННЫХ ПОКАЗАНИЙ МНОГИХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ

При решении некоторых задач, связанных с навигацией и наведением подвижных объектов, управлением ими и т. д., возникает необходимость оценки координат объекта на основании мгновенных показаний многих измерительных устройств. В математической формулировке соответствующая проблема сводится к следующему.