планов эксперимента при группированных наблюдениях отклика. - В сб.: Применение ЭВМ в оптимальном планировании и управлении. Новосибирск, НГУ, 1976, с. 105-110.
3. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. М., "Наука", 1972, с. 77-86.
4. Денисов В.И., Цой Е.Б. Условия оптимальности для минимаксных планов эксперимента. - В сб.: Применение ЭВМ в оптимальном планировании и управлении. Новосибирск НГУ, 1977, с. 95-101.
5. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами. М., "Мир", 1973, с. 415-421.

А.А. Наумов

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЕСПЕЧЕНИИ СИСТЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО М-ИНВАРИАНТНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ РЕГРЕССИОННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

(Новосибирск)

Рассматриваются вопросы построения математического обеспечения, предназначенного для решения задач оптимального планирования регрессионных экспериментов в случае неадекватных математических моделей в рамках системы автоматизации экспериментальных исследований. Для полилинейных относительно базисных функций и многооткликовых моделей строятся оптимальные планы, инвариантные относительно неоцениваемых параметров. Оптимальное М-планирование экспериментов проводится с учетом априорной информации качественного и количественного характера.

Пусть истинное уравнение регрессии и ее оценка имеют вид:

$$f(x,A)=L\,(A;\ \varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x)) \qquad (1)$$

и

$$\hat{g}\,(x,\hat{A}_1)=L_1\,(\hat{A}_1;\ \tau_0(x), \tau_1(x), \dots, \tau_z(x)), \qquad (2)$$

где $L(\cdot)$ и $L_1(\cdot)$ - полилинейные формы относительно множеств векторов $\{\varphi_i(x)\}_{i=\overline{0,p}}$ и $\{\tau_i(x)\}_{i=\overline{0,z}}$ с матрицами неизвестных коэффициентов A и оценок $\hat{A}_1$ размерности $(n_0\times n_1\times\dots\times n_p)$ и $(\ell_0\times\ell_1\times\dots\times\ell_z)$

соответственно. Предположим, что $\varphi_i^T(x) \in F_i$, $\varphi_i^T(x) = (\varphi_{i0}(x), \varphi_{i1}(x), \dots, \varphi_{in_i}(x))$, где $n_i + 1 = \dim F_i$, $i = 0, 1, \dots, p$, $F = \oplus_{i=0}^{p} F_i$ и $\tau_i^T(x) \in G_i$, $\tau_i^T(x) = (\tau_{i0}(x), \tau_{i1}(x), \dots \tau_{il_i}(x))$, $l_{i+1} = \dim G_i$, $i = 0, 1, \dots, z$, $G = \oplus_{i=0}^{z} G_i$.
Кроме этого, полагаем $x \in \mathscr{X}$, $\mathscr{X}$ - область планирования - компакт в R^k.

Необходимо найти такой план эксперимента ξ

$$\xi = \begin{pmatrix} x_0, x_1, \dots, x_N \\ \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_N \end{pmatrix}, \quad \xi_i \geqslant 0, \ i = \overline{0, N}, \tag{3}$$

$\sum_{i=0}^{N} \xi_i = 1$, $x_i \in \mathscr{X}$,
чтобы аппроксимирующая функция (2) приближала функцию регрессии (I) наилучшим образом в смысле систематической ошибки B_H,

$$B_H = \| f(x, A) - E\hat{g}(x, \hat{A}_1) \|_H^2. \tag{4}$$

Здесь $\|\cdot\|_H$ - норма в линейном функциональном пространстве H. Результаты наблюдений над функцией (I) являются независимыми реализациями случайной величины Y, распределенной по закону $N(f(x,A), (\sigma^2 \delta_{ij} \dots m)_{i,j,\dots}, m = \overline{0, N})$, т.е. $Y_j = f(x_j, A) + \varepsilon_j$, $E\varepsilon_j = 0$, $E(\varepsilon_i \varepsilon_s) = \sigma^2 \delta_{is}$, $j, i, s = 0, 1, \dots, N$, E - символ математического ожидания.

Определение I. План эксперимента (3), минимизирующий ошибку (4) и не зависящий от значений параметров матрицы A, оценки которых не входят в $\hat{A}_1$, назовем М-инвариантным в метрике пространства H ($МПЭ_H$).

Определение 2. $МПЭ_H$ -план, минимизирующий выпуклый относительно информационной матрицы оценок $\hat{A}_1$ функционал ψ. Назовем его ψ -оптимальным (ψ-$МПЭ_H$).

Рассмотрим основные свойства $МПЭ_{L^2}$ -планов при оценивании по методу наименьших квадратов в случае полилинейных моделей. При этом будем полагать, что F и G - подпространства пространства, интегрируемых с квадратом по области $\mathscr{X}$ с определенным на $\mathscr{X}$ весом $\omega(x)$, $\omega(x) \geqslant 0$, $\int_{\mathscr{X}} \omega(x) dx = 1$, функций. Таким образом,

$$B_{L^2} = \int_{\mathscr{X}} \omega(x) \left[f(x, A) - E\hat{g}(x, \hat{A}_1) \right]^2 dx. \tag{5}$$

Теорема I. Необходимым и достаточным условием того, что план (3) является $МПЭ_{L^2}$ -планом при оценивании по методу наименьших квадратов и при $G_i \subset F_i$, $i = 0, 1, \dots, z$; $z = p = k-1$, $\mathscr{X} = \mathscr{X}_0 \times \mathscr{X}_1 \times \dots \times \mathscr{X}_{k-1}$, $\tau_i(x) = \tau_i(x_i)$, $\varphi_i(x) =$

$= \varphi_i(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, k-1$, служит следующее равенство:

$$\int_{\mathfrak{X}} \Big[L_1(P(A; \tilde{P}_{00}, \tilde{P}_{11}, \dots, \tilde{P}_{pp}); \tau_0(x_0), \dots, \tau_z(x_z)) - L(A; \varphi_0(x_0), \dots, \varphi_p(x_p)) \Big] \tilde{M}(\tau_0(x_0), \dots, \tau_z(x_z))\, \omega(x)\, dx = 0. \tag{6}$$

Здесь $P(T; S_1, S_2, \dots, S_k)$ – произведение k -мерной матрицы T на матрицы $S_1, S_2, \dots, S_k$, $\tilde{P}_{ii} = (\Phi^T_{\tau_i} \Phi_{\tau_i})^{-1} \Phi_{\tau_i} \Phi_{\varphi_i}$, $i = 0, 1, \dots z$,

$$\Phi_{\tau_i} = \begin{pmatrix} \sqrt{\xi_i^0}\, \tau_i^T(x_i^0) \\ \vdots \\ \sqrt{\xi_i^{N_i}}\, \tau_i^T(x_i^{N_i}) \end{pmatrix}, \quad \Phi_{\varphi_i} = \begin{pmatrix} \sqrt{\xi_i^0}\, \varphi_i^T(x_i^0) \\ \vdots \\ \sqrt{\xi_i^{N_i}}\, \varphi_i^T(x_i^{N_i}) \end{pmatrix}, \quad i = \overline{0, z},$$

$x_i^m \in \mathfrak{X}_i$, $i = 0, 1, \dots, k-1$; $m = 0, 1, \dots, N_i$; $\xi_\ell = \xi_0^i \xi_1^j \dots \xi_{k-1}^m$; $x_\rho = (x_0^i, x_1^j, \dots, x_{k-1}^m)$, $N = \Pi_{i=0}^{k-1} N_i$, $i = 0, 1, \dots, N_0$; $j = 0, 1, \dots, N_1$; $\dots$; $m = 0, 1, \dots, N_k$, $\tilde{M}(\tau_0(x_0), \dots, \tau_z(x_z))$ - $(z+1)$- мерная матрица, полученная в результате произведения векторов $\tau_0(x_0), \dots, \tau_z(x_z)$.

Отметим, что при $A = (a_{00}, \dots, a_{0n_0})$, $\hat{A}_1 = (\hat{a}_{00}, \dots, \hat{a}_{0n_1})$, $n_1 \leqslant n_0$, $\varphi_0^T(x) = (\varphi_{00}(x), \varphi_{01}(x), \dots \varphi_{0n_0}(x)) = (\tau_0^T(x), \varphi_{0,n_0+1}(x), \varphi_{0,n_0+2}(x), \dots, \varphi_{0n_0}(x))$, из выражения (6) можно получить необходимое и достаточное условие несмещенного в метрике пространства L^2 планирования экспериментов С.М. Ермакова и Е.В. Седунова [1], [2].

Т е о р е м а 2. Необходимым и достаточным условием применимости метода прямых произведений к задаче синтеза ψ-$МПЭ^2_L$ -планов в случае $\omega(x) = \omega_0(x_0) \dots \omega_{k-1}(x_{k-1})$, $G_i \subset F_i$, $i = 0, 1, \dots, z$; $z = p = k-1$, $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_0 \times \mathfrak{X}_1 \times \dots \times \mathfrak{X}_{k-1}$ и при линейном оценивателе $T = T_0 \otimes T_1 \otimes \dots \otimes T_{k-1}$ служит следующее равенство:

$$\frac{\partial \psi(M)}{\partial M} = \otimes_{i=0}^{k-1} \frac{\partial \psi(M^{(i)})}{\partial M^{(i)}},$$

где $M = \otimes_{i=0}^{k-1} M^{(i)}$, $M^{(i)} = \Phi^T_{\tau_i} \Phi_{\tau_i}$, матрицы Φ_{τ_i} определены выше.

С л е д с т в и е. Для задач построения D -, A - и L -оптимальных $МПЭ^2_L$ -планов при выполнении условий теоремы 2 применим метод прямых произведений.

Л и т е р а т у р а

1. Е р м а к о в С.М. Об оптимальных несмещенных планах регрессивных экспериментов. - Труды МИ АН СССР. Т. III, 1970, с. 252-257.
2. С е д у н о в Е.В. Обобщение задачи Бокса-Дрейпера в планировании регрессионных экспериментов. - "Заводская лаборатория". 1973, № 3, с. 308-313.

Э.И. Митрошин, В.А. Васильев, П.Н. Мартынчук

АВТОМАТИЗАЦИЯ ПОИСКА ДОПУСТИМОЙ НАЧАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ДВИЖЕНИЯ ЛА

(М о с к в а)

К числу актуальных задач, связанных с исследованием процессо управления сложными динамическими объектами, какими являются летательные аппараты (ЛА), принадлежит задача автоматизации поиска на ЦВМ допустимых начальных областей движения. Необходимость автоматизации таких исследований обусловлена требованием определения большого числа динамических характеристик ЛА в различных сложных ситуациях и неустановившихся режимах: оценки предельных маневренных возможностей ЛА по дальности при заходе на посадку с неработающим двигателем, оценки гарантированной точности выведения ЛА к посадочной полосе в условиях неблагополучного сочетания возмущающих воздействий и в ряде других задач.

Настоящая работа посвящена вопросам автоматизации процесса поиска границы области таких предельных начальных значений фазовых координат, при которых ЛА, используя ресурс управления, может быть выведен в конечную область с заданными значениями фазовых координат. В качестве искомой области можно рассматривать такие сочетания начальных условий, как высота - боковое отклонение, скорость - высота, дальность - боковое отклонение, боковое отклонение - угол курса и др.

Рассмотрим задачу определения границы области допустимых начальных условий по боковой и продольной дальности. В ходе ее решения реализуется многошаговый процесс, включающий в себя анализ