входных воздействиях без решения дифференциальных уравнений чувствительности.

Алгоритмы вычисления параметрических передаточных функций чувствительности, а также алгоритмы анализа чувствительности при конкретных входных воздействиях хорошо реализуются на цифровых вычислительных машинах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Солодовников В. В., Дмитриев А. Н., Егупов Н. Д., Ортогональный метод анализа и синтез линейных систем автоматического управления на основе понятия моментов. Сб. «Автоматическое управление и вычислительная техника», вып. 8, «Машиностроения», 1968.
2. Солодов А. В., Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами, М., Физматгиз, 1962.
3. Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М., Чувствительность систем автоматического управления, Л., изд. «Энергия», 1969.
4. Бойков А. Д., Дмитриев А. Н., Егупов Н. Д., Ледяев С. Ф. Приближенный метод определения передаточных функций нестационарных систем с полиномиальными и экспоненциальными коэффициентами. Труды ВНИИЦЕММАШ, вып. XIII, Тольятти, 1972.
5. Бойков А. Д., Егупов Н. Д., Ледяев С. Ф. Приближенный метод определения передаточных функций нестационарных систем с периодическими коэффициентами. Труды КуАИ, вып. 50, Куйбышев, 1972.
6. Бойко А. Д., Ледяев С. Ф., Детерминированный анализ многомерных нестационарных систем на основе параметрических передаточных функций. Труды УПИ, том 8, вып. 2. Ульяновск, «Приборостроение», 1971.
7. Бойков А. Д., Ледяев С. Ф., Определение параметрических передаточных и импульсных переходных функций многомерных систем с экспоненциальными коэффициентами. Труды УПИ, том VIII, вып. III, Ульяновск, Радиотехника, 1972.
8. Бойков А. Д., Гришанов Г. М. Методы теории чувствительности в задачах оптимального управления технологическими объектами. Пятое Всесоюзное Совещание по проблемам управления (Москва, 1971 г.). Рефераты докладов, часть I. М., изд. «Наука», 1971.
9. Бойков А. Д., Гришанов Г. М. Оптимальное управление процессами методами теории чувствительности, Труды Республиканской научной конференции «Автоматическое управление технологическими процессами в различных отраслях народного хозяйства», «Алгоритмизация и автоматизация процессов и установок», вып. 3, Куйбышев, 1970.

И. А. Вакарин, В. С. Демашов, В. П. Кузнецов, Е. П. Чураков

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ОЦЕНКЕ КООРДИНАТ ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА ПО СОВОКУПНОСТИ МГНОВЕННЫХ ПОКАЗАНИЙ МНОГИХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ

При решении некоторых задач, связанных с навигацией и наведением подвижных объектов, управлением ими и т. д., возникает необходимость оценки координат объекта на основании мгновенных показаний многих измерительных устройств. В математической формулировке соответствующая проблема сводится к следующему.

Пусть в известной области Γ k-мерного евклидова пространства определен вектор $\vec{\vartheta}(t)$ $(\vec{\vartheta}(t) \in \Gamma \subset E_k)$, физически характеризующий положение объекта в этом пространстве. Информация о значении этого вектора, искаженная различного рода шумами, содержится в показаниях r измерительных устройств. В момент наблюдения регистрируются мгновенные показания всех измерительных устройств, следствием чего является вектор наблюдения

$$\vec{V} = \vec{f}(\vec{\vartheta}) + \vec{P}, \tag{1}$$

где $\vec{V} = (v_1, v_2, \ldots, v_r)$ — r — мерный вектор наблюдения, i-ая компонента которого $(i = \overline{1, r})$ физически представляет показания 1-го измерительного прибора;

$\vec{f}(\vec{\vartheta}) = (f_1(\vec{\vartheta}), f_2(\vec{\vartheta}), \ldots, f_r(\vec{\vartheta}))$ — вектор полярных составляющих показаний приборов, причем $f_1(\vec{\vartheta})$, $i = \overline{1, r}$ представляет собой функциональную зависимость показаний i-го прибора от вектора $\vec{\vartheta}(t)$; заметим, что совокупность нелинейных функций $f_i(\vec{\vartheta})$, $i = 1$, ч предполагается произвольной линейной независимой системой;

$\vec{\vartheta}$ — значение вектора $\vec{\vartheta}(t)$ в момент наблюдения;

$\vec{P} = (p_1, p_2, \ldots, p_r)$ — вектора шумов с априори известными статическими характеристиками.

Задача заключается в отыскании в некотором смысле наилучшей оценки $\vec{\vartheta}$ вектора координат $\vec{\vartheta}$ по совокупности компонент вектора наблюдения $\vec{V}$.

Наиболее строгим и общим решением задачи можно считать байсов подход [1], основанный на минимизации среднего риска

$$M_{\vec{V}, \vec{v}} \left\{ c(\vec{\vartheta}, \hat{\vec{\vartheta}}) \right\} = \min, \tag{2}$$

где $c(\vec{\vartheta}, \check{\vec{\vartheta}})$ — выбранная функция стоимости, $M_{\vec{V}, \vec{v}}$ — символ осреднения по пространствам возможных значений вектора наблюдений $\vec{V}$ и координат $\vec{\vartheta}$.

При квадратичной функции стоимости минимизация функционала (2) приводит к известной [1, 2] оценки вида

$$\hat{\vec{\vartheta}} = \int_{\Gamma} \vec{\vartheta} F(\vec{V} | \vec{\vartheta}) W(\vec{\vartheta}) d\vec{\vartheta} \left[\int_{\Gamma} F(\vec{V} | \vec{\vartheta}) W(\vec{\vartheta}) d\vec{\vartheta} \right]^{-1}, \tag{3}$$

где $F(v | \vec{\vartheta})$ — условная плотность вероятностей наблюденных данных (функция правдоподобия), $W(\vec{\vartheta})$ — априорная плотность вероятности вектора $\vec{\vartheta}$.

В случае гауссовых помех, т. е. $p_i \in N(0, \delta^2)$, $i = \overline{1, r}$, характеризующихся корреляционной матрицей $\vec{\kappa} = \| M\{p_i p_j\} \|$, i, $j = \overline{1, r}$, и отсутствие априорной информации о распределении вектора $\vec{\vartheta}$ в области Г (что наиболее часто бывает в практических ситуациях) соотношение (3) принимает вид

$$\hat{\vec{\vartheta}} = \frac{\int\limits_{\Gamma} \vec{\vartheta} \exp\left\{-\frac{1}{2}\widetilde{(\vec{V}-\vec{f}(\vec{\vartheta}))}\vec{K}^{-1}(\vec{V}-\vec{f}(\vec{\vartheta}))\right\} d\vec{\vartheta}}{\int\limits_{\Gamma} \text{pex}\left\{-\frac{1}{2}\widetilde{(\vec{V}-\vec{f}(\vec{\vartheta}))}\vec{K}^{-1}(\vec{V}-\vec{f}(\vec{\vartheta}))\right\} d\vec{\vartheta}}, \tag{4}$$

где $\vec{\kappa}^{-1}$ — матрица, обратная $\vec{\kappa}$, $(\sim)$ — символ транспонирования. Однако в силу нелинейной зависимости вектора наблюдений $\vec{V}$ от координат $\vec{\vartheta}$ не удается осуществить операцию многомерного интегрирования в соотношении (4), вследствие чего оказывается невозможным определение оценки $\vec{\vartheta}$ в виде явной зависимости от результатов наблюдения $\vec{V}$. Аналогичные затруднения возникают и при использовании для оценки иных методов (например, по максимуму правдоподобия или апостериорной плотности вероятностей). Поэтому предлагается приближенный способ решения задачи, не приводящий к затруднениям классических подходов, но в значительной степени использующий их аппарат.

Выделим в области Г, на которой определен вектор $\vec{\vartheta}$, l дискретных точек, с некоторым шагом квантования, заполняющих всю область Г и по какому-либо признаку пронумерованных от 1 до l так, что в j-ой точке вектор $\vec{\vartheta}$ принимает значение $\vec{\vartheta}_j$. Введем в рассмотрение l гипотез, каждая из которых предполагает, что координаты объекта совпадают со значением вектора $\vec{\vartheta}$ в соответствующей дискретной точке. Правомочность каждой из введенных гипотез может быть охарактеризована соответствующей функцией правдоподобия или некоторым однозначным преобразованием ее. В качестве такого показателя правомочности j-ой гипотезы, т. е. предположения $\vec{\vartheta}=\vec{\vartheta}_j$, может быть принят, например, логарифм обобщенного отношения функций правдоподобия, т. е. величина

$$L_j = 2\widetilde{\vec{f}(\vec{\vartheta}_j)}\vec{K}^{-1}\vec{V} - \widetilde{\vec{f}(\vec{\vartheta}_j)}\vec{K}^{-1}\vec{f}(\vec{\vartheta}_j)),\ j=\overline{1,\ l} \tag{5}$$

Очевидно, вектор $\vec{\vartheta}$ будет принадлежать окрестности той точки из числа l, функция L, в которой окажется наибольшей. Пусть это будет точка с индексом, s, т. е.

$$L_s = \max\{L_j,\ j=\overline{1,\ l}\}. \tag{6}$$

Выделим еще одну точку, пусть с индексом q, функция L_g, в которой окажется наибольшей после L_s

$$L_q = \max\{L_j,\ j=\overline{1,\ l},\ j\neq s\}. \tag{7}$$

Тогда приближенно можно считать, что оптимальная по максимуму правдоподобия оценки $\vec{\vartheta}$ находится в окрестности направления s—q. Последнее позволяет допустить, что вектор наблюдения $\vec{V}$, определяемый в соответствии с (1), достаточно точно может быть выражен через значения вектора $\vec{\vartheta}$ в двух выделенных точках и неизвестные весовые коэффициенты

$$\vec{V} \cong \vec{\Phi} \vec{A} + \vec{P}, \tag{8}$$

где $\vec{A} \equiv (a_s, a_q)$ — вектор неизвестных весовых коэффициентов;

$$\vec{\Phi} = \left\| \begin{matrix} f_1(\vec{\vartheta}_s) & f_1(\vec{\vartheta}_q) \\ \vdots & \vdots \\ f_r(\vec{\vartheta}_s) & f_r(\vec{\vartheta}_q) \end{matrix} \right\| \text{— прямоугольная матрица}$$

порядка $r \times 2$, элементы которой $f_j(\vec{\vartheta}_s)$, $f_j(\vec{\vartheta}_q)$, $j = \overline{1, r}$, определяют показания j-го прибора в функции фиксированных значений вектора $\vec{\vartheta}$ в s-ой и q-ой точках области Г.

Допустимость аппроксимации (8) подтверждается следующими рассуждениями: если вектор $\vec{\vartheta}$, формирующий вектор $\vec{V}$ в соответствии с (1), оказывается равным $\vec{\vartheta}_s$, то в (8) достаточно положить $a_s = 1$, $a_q = 0$, вследствие чего (8) тождественно совпадет с (2); если же $\vec{\vartheta} \neq \vec{\vartheta}_s$, то найдется такая совокупность коэффициентов a_s, a_q, при которой соотношение (8) с приемлемой точностью аппроксимирует вектор (1).

Выбор q-ой «опорной» точки можно осуществить и по иному принципу. Для этого введем в рассмотрение вектор-градиент в точке (6)

$$\operatorname{grad} L_s = \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta_1} L_s, \frac{\partial}{\partial \vartheta_2} L_s, \ \ldots, \ \frac{\partial}{\partial \vartheta_k} L_s \right), \tag{9}$$

где $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_k$ — компоненты вектора $\vec{\vartheta}$. Тогда в качестве q-ой опорной точки можно принять какую-либо иную точку в направлении (9).

Найдем такую оценку $\hat{\vec{A}}$ вектора A, которая наиболее полно соответствует модели (8). Пусть такая оценка находится из условия

$$M_{\vec{V}, \vec{A}} \left\{ \| \vec{A} - \hat{\vec{A}} \|^2 \right\} = \min. \tag{10}$$

Используя известный [1] аппарат минимизации функционала (10), находим

$$\hat{\vec{A}} = \vec{D}^{-1} \tilde{\vec{\Phi}} \vec{K}^{-1} \vec{V}, \ \vec{D} = \tilde{\vec{\Phi}} \vec{K}^{-1} \vec{\Phi}. \tag{11}$$

Полученные оценки $\vec{\hat{A}}$ позволяют найти оценку вектора $\vec{f}(\vec{\vartheta})$. Из сопоставления (1) и (8) вытекает

$$\hat{\vec{f}}(\vec{\vartheta}) = \vec{\Phi}\hat{\vec{A}}, \tag{12}$$

где через $\hat{\vec{f}}(\vec{\vartheta})$, обозначена оценка вектора $\vec{f}(\vec{\vartheta})$.

Располагая оценкой $\vec{f}(\vec{\vartheta})$, можем приступить к определению искомой оценки $\vec{\vartheta}$. Для этого достаточно по какому-либо признаку из всех r, составляющих вектора $\vec{f}(\vec{\vartheta})$, выделить κ. κ — размерность вектора $\vec{\vartheta}$, и рассмотреть систему уравнений

$$\hat{f}_j(\vec{\vartheta}) = f_j(\hat{\vec{\vartheta}}), \quad j = \mathrm{var}, \tag{13}$$

где $\hat{f}_j(\vec{\vartheta})$ — оценка j-ой составляющей вектора $\hat{\vec{f}}(\vec{\vartheta})$, причем j принимает κ значений в соответствии с используемым правилом предпочтения составляющих этого вектора.

Для устранения неопределенности, возникающей при составлении системы (13), можно рассмотреть все возможные системы типа (13) с последующим осреднением всех решений. Однако это приводит к громоздким вычислениям, в связи с чем целесообразно установить предположение для формирования системы (13).

Процедура (13) может считаться заключительным этапом решения данной задачи. Однако полученное решение можно уточнить применением дополнительной итеративной процедуры. Для этого найденную из (13) оценку вектора $(\hat{\vartheta})$ можно считать приближенной и сформировать новый вектор $\vec{\vartheta}+\vec{\varepsilon}$, где $\vec{\varepsilon}$ — вектор поправок. Подставляя $\vec{\vartheta}=\hat{\vec{\vartheta}}+\vec{\varepsilon}$ в (1) и линеаризуя соответствующие нелинейности в окрестности точки ϑ, получаем линейную модель относительно вариации $\vec{\varepsilon}$. Затем устанавливается оценка $\hat{\vec{\varepsilon}}$, на основании которой находится уточненная оценка вектора $\vec{\vartheta}$. Итеративная процедура может быть повторена снова до полной сходимости алгоритма. При этом устраняются все затруднения, возникающие в связи с неопределенностью при формировании системы (13).

В заключение отметим, что изложенный метод моделировался на ЦВМ БЭСМ-6 для ряда частных задач и показал хорошие результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи. М., «Советское радио», т II, 1962.

2. Пугачев В. С. Теория случайных процессов и ее применение к задачам автоматического управления. М., Физматгиз, 1962.