А. Д. Бойков, Л. В. Сафонова, Е. А. Вакулич

# ОРТОГОНАЛЬНЫЙ МЕТОД ВОССТАНОВЛЕНИЯ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ ПО ВЫХОДНОЙ РЕАКЦИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В работе предлагается ортогональный метод моментов восстановления детерминированных сигналов на входе динамической системы. Для решения задачи требуется задание выходного сигнала и импульсной переходной функции аналитически, таблично или графически. Метод удобен для реализации на ЦВМ.

Во многих практических задачах электротехники, теории связи, теории управления динамическими системами, при автоматизации экспериментальных исследований требуется дать оценку входному сигналу, недоступному для измерения, если известны динамические характеристики системы и выходная функция системы [3].

Решение задачи восстановления входного сигнала возможно, если наложить специальные ограничения на класс рассматриваемых входных воздействий и на динамические характеристики системы [4].

С этой целью в настоящей работе предлагается применить ортогональный метод моментов, приведенный в работах 1, 2.

## Восстановление входного сигнала непрерывной динамической системы в виде разложения по ортогональным полиномам и функциям Лагерра

Рассмотрим линейную непрерывную динамическую систему с импульсной переходной функцией $\kappa(t)$. Необходимо дать оценку входному детерминированному сигналу $f(t)$ по заданному сигналу на выходе $x(t)$.

Пусть $x(t)$, $k(t)$, $f(t)$ — функции, определенные на всей вещественной оси, подчиняющиеся условиям преобразования Лапласа, кроме того при

$$t < 0, \quad f(t) = 0. \tag{1}$$

Аналитическая связь между входным и выходным сигналами и импульсной переходной функцией осуществляется интегральным уравнением Вольтерра I рода

$$x(t) = \int_0^\infty f(t-\tau)\,k(\tau)\,d\tau = \int_0^t f(\tau)\,k(t-\tau)\,d\tau, \tag{2}$$

которое с учетом условия (1) представим в следующем виде:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)\,k(t-\tau)\,d\tau. \tag{3}$$

Согласно теореме свертывания уравнение (3) в комплексной области

$$X(s) = W(s) F(s), \tag{4}$$

где $X(s)$, $W(s)$, $F(s)$ — преобразования Лапласа от соответствующих временных функций $x(t)$, $k(t)$, $f(t)$.

Выражение (4) дает алгебраическую связь между изображениями функций в комплексной области. Используя обратное преобразование Лапласа, получаем решение уравнения (3) во временной области

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{X(s)}{W(s)} e^{st}\, ds, \ (t>0),$$

где $c = \mathrm{Re}\, s$, $W(s) = 0$ на всей оси $s$.

Таким образом, решение уравнения (3) связано с двойным переходом функции $x(t)$ и $k(t)$ из временной области путем преобразования Лапласа в область комплексного переменного $s$ и, наоборот, нахождение искомой функции $f(t)$ во временной области по известным преобразованиям Лапласа в комплексной области.

Для восстановления входа системы целесообразно применить ортогональный метод моментов [3]. Входной сигнал будем искать в виде разложения по ортонормальной системе функций. Применим ортогональные полиномы и ортогональные функции Лагерра. Выбор базиса объясняется рядом замечательных свойств данных систем [1].

Разложение входного сигнала во временной области

$$f(t) = c \sum_{k=1}^{\infty} c_k L_k(ct) \tag{5}$$

где $\quad c_k = \int\limits_0^{\infty} f(t) L_k(ct)\, \omega(ct)\, dt$ — коэффициенты Фурье.

$L_k(ct)$ — ортонормированные на интервале $(0, \infty)$ полиномы или функции Лагерра;

$\omega(ct)$ — весовая функция данной системы;

$c$ — масштабный коэффициент веса системы.

Обобщенный спектр $\{c_к\}$ входного сигнала можно определить через моменты последнего $\mu_к(t)$ следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} c_0 &= \mu_0 \\ c_1 &= \mu_0 - c\mu_1 \\ &\ldots\ldots \\ c_k &= \sum_{n=0}^{k} (-1)^n c^n \frac{k!}{(n!)^2 (k-n)!} \mu_k \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{6}$$

где $$\mu_k(t) = \int\limits_0^\infty t^k f(t)\,\omega(t)\,dt, \quad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

Рассмотрим метод вычисления моментов входного сигнала $\mu_к(t)$ по моментам выходного сигнала и импульсной переходной функции $\alpha_к(t)$ $\beta_к(t)$ соответственно.

Согласно теореме о дифференцировании изображения

$$(-1)^i X^{(i)}(s) = \int\limits_0^\infty t^i x(t)\, e^{-st}\, dt, \quad i = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

выражениям взвешенных моментов для выходного сигнала $x(t)$

$$(-1)^k \alpha_k = \int\limits_0^\infty t^k x(t)\,\omega(t)\,dt, \quad k = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

и импульсной переходной функции системы $k(t)$

$$(-1)^k \beta_k = \int\limits_0^\infty t^k k(t)\,\omega(t)\,dt, \quad k = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

при

$$\omega(t) = e^{-ct} \tag{7}$$

следует

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \left[X^{(k)}(s)\right]_{s=c}, \\ \beta_k &= \left[W^{(k)}(s)\right]_{s=c}. \end{aligned} \tag{8}$$

Используя уравнение (4) и соотношения (7), получаем искомую зависимость $\mu_п = f(\alpha_п, \beta_п)$ в виде

$$\mu_n = \frac{\left[\dfrac{\alpha_n}{n!} - \sum\limits_{m-0}^{n-1} \dfrac{\mu_m \beta_{n-m}}{m!\,(n-m)!}\right] n!}{\beta_0} \tag{9}$$

Если в качестве ортогонального базиса используются полиномы Лагерра, то весовая функция определяется выражением (7), если же обобщенный спектр входного сигнала определен по функции Лагерра, то

$$\omega(t) = e^{-\frac{c\,t}{2}}. \tag{10}$$

### Применение модифицированного метода моментов для восстановления входного сигнала дискретной динамической системы

Методику расчета входных сигналов динамической системы, изложенную в первом разделе работы, пользуясь понятием дискретного преобразования Лапласа и моментов дискретной функции

$$X(q, \sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT + \sigma T) e^{-qT_n},$$

$$\mu_k^x = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT + \sigma T) n^k. \quad (11)$$

соответственно, можно применить для восстановления сигнала на входе дискретной динамической системы.

Однако при расчете моментов (11) погрешность вычислений быстро растет с ростом $k$. Поэтому целесообразно получить такой метод, расчетные формулы которого не содержали бы моменты порядка выше нулевого.

Рассмотрим модифицированный метод моментов восстановления входных сигналов дискретной динамической системы.

Дискретная динамическая система определяется в комплексной области $q$ уравнением

$$X(q) = W(q) Y(q), \quad (12)$$

в котором

$X(q)$, $Y(q)$ — дискретное преобразование Лапласа выходного и входного $y = (nT + \delta T)$ сигналов соответственно,

$W(q)$ — передаточная функция дискретной системы.

Представим, пользуясь определением дискретного преобразования Лапласа, уравнение (12) в развернутом виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-qn} = \sum_{n=0}^{\infty} y(n) e^{-qn} \sum_{n=0}^{\infty} k(n) e^{-qn},$$

откуда

$$\sum_{n=0}^{\infty} y(n) e^{-qn} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-qn}}{\sum_{n=0}^{\infty} k(n) e^{-qn}}. \quad (13)$$

Обозначим

$$\mu_0^y = \sum_{n=0}^{\infty} y(n) e^{-q_k n}, \quad (14)$$

где $q_k$ — действительное число, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Искомый сигнал определяется в виде разложения по дискретным ортогональным многочленам

$$y(mT + \sigma T) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varphi_i (mT + \sigma T). \quad (15)$$

Обозначим $mT+\delta T=n$, тогда ряд во временной и комплексной области соответственно

$$
\begin{aligned}
y(n) &= \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varphi_i(n), \\
y(q) &= \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varphi_i(q).
\end{aligned}
\tag{16}
$$

В качестве дискретного ортогонального базиса рассмотрим дискретные многочлены В. Гана, Мейкснера, Шарлье, которые можно представить общим выражением

$$\varphi_k(n) = \sum_{\nu=0}^{k} \alpha_{\nu k} n^{\nu},$$

где для дискретных многочленов В. Гана

$$\alpha_{\nu k}(\beta,\ \gamma,\ \delta) = \sum_{k=\nu}^{m} \frac{(\beta)_k (\gamma)_k}{k!} \frac{(-k)_\nu (\beta+\gamma-\delta+k)_\nu}{(\beta)_\nu (\gamma)_\nu (1)_\nu} \sigma_{k-\nu},$$

для многочленов Мейсксneра

$$\alpha_{\nu k}(\beta,\ c) = (\beta_k) \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^k\, k!}{(k-\nu)!\,(\nu)!} A^{\nu} \frac{\sigma_{k-\nu}(-1)^{k-\nu}}{(\beta)_\nu},$$

для многочленов Шарлье

$$\alpha_{\nu k}(a) = \sum_{k=\nu}^{m} \frac{(-1)^{\nu}\, m!}{a^{\nu}\,(m-\nu)!\,(\nu)!} \sigma_{m-\nu}(-1)^{m-\nu}.$$

Дискретное преобразование Лапласа отображает ортогональный базис в комплексной области

$$\Phi_i(q) = \sum_{\nu=0}^{k} \alpha_{\nu k} \frac{e^q}{(e^q-1)^{\nu+1}} R_\nu(e^q),$$

где

$$R_\nu(e^q) = \nu! \left\| \begin{matrix} 1 & 1-e^q & 0 \ldots 0 \\ \frac{1}{2!} & 1 & 1-e^q \ldots 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{\nu!} & \frac{1}{(\nu-1)!} & \frac{1}{(\nu-2)!} \ldots 1 \end{matrix} \right\|$$

Придавая в выражении (16) комплексному аргументу значения $q=q_к$, ($k=1, 2, 3, \ldots, \vartheta$) с учетом равенств (13) и (14) получаем систему алгебраических уравнений

$$\mu_0^y = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \, \Phi_i(q_k)$$

компоненты решения которой являются искомыми элементами дискретной спектральной характеристики $\{c_i\}$.

## Некоторые вопросы практического применения метода

При практическом решении задачи следует конкретизировать ряд параметров расчетных формул: масштабный коэффициент веса $c$, длину интервала аппроксимации $T$, количество членов в разложении входного сигнала $n$.

Так как предполагается, что входной сигнал имеет конечную протяженность, то и аппроксимация будет проводиться на конечном временном интервале $[0, T]$, который с достаточной точностью можно выбрать по виду $x(t)$. Получим.

$$\alpha_n = \int_0^T t^n x(t)\,\omega(t)\,dt,$$
$$\beta_n = \int_0^T t^n k(t)\,\omega(t)\,dt, \tag{17}$$

где $\omega(t)$ определяется в зависимости от выбранного базиса.

Величину $c$ находим из неравенства

$$e^{-cT} \leqslant \varepsilon,$$

где $\varepsilon$ характеризует близость подынтегральной функции в (17) к нулю для времени $t \geqq T$.

Из выражения (9) расчетная формула для $c$ $\quad c \geqslant -\frac{\ln \varepsilon}{T}$.

Расчет $C$ ведется по заданным значениям $\varepsilon$.

Аппроксимируя входной сигнал $f(t)$ бесконечной суммой, в силу свойства полноты ортонормальной системы, имеем точное равенство в выражении (5). Практически же нам представляется для решения задача, когда частотный спектр $f(t)$ ограничен [4], вследствие чего ограничено и число членов разложения в (5), т. е. входной сигнал будет представлен усеченным аппроксимирующим рядом

$$f_n(t) = c \sum_{k=1}^{n} c_k \, L_k(ct). \tag{18}$$

Выбор числа членов $n$ в сумме (18) следует производить, исходя из погрешности аппроксимации в смысле среднеквадратического критерия

$$\| f_n(t) - f_{n-1}(t) \|^2 = \int_0^T [f_n(t) - f_{n-1}(t)]^2 \omega(t)\, dt \leqslant \delta \qquad (19)$$

Выбираем такое $n$, начиная с которого $n$-я и $n$-1-я аппроксимации для $f(t)$ близки с точностью до $\delta$. Весовая функция $\omega(t)$ выбирается в (19) в зависимости от базиса.

Таким образом, общая схема решения задачи следующая. По заданным $x(t)$ и $k(t)$ сигнала (9) определяем спектр входного сигнала по формулам (6) и рассчитываем $f(t)$ по аналогии с (18). Необходимые параметры расчета выбираются согласно вышеизложенным рекомендациям.

При расчете на ЦВМ входной сигнал получаем в табличном задании, от которого легко перейти к графическому. Наличие спектра $\{c_к\}$ позволяет получить аналитическую форму задания $f(t)$.

Очень часто выходной сигнал и импульсная переходная функция заданы таблично или графически.

При графическом задании предполагается переход к табличному с помощью преобразователя «аналог-код» с одновременным вводом в ЦВМ.

Дискретизация сигнала ведется согласно теореме В. А. Котельникова [5]

$$\Delta T = \frac{1}{2f_{\max}},$$

где $f_{\max}$ — наибольшая частота колебаний функции, выраженная в герцах.

Обычно число отсчетов берется избыточным, исходя из возможности искажения ряда замеров.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Солодовников В. В., Дмитриев А. Н., Егупов Н. Д. Ортогональный метод анализа и синтеза линейных систем автоматического управления на основе понятия моментов. В. сб. «Автоматическое управление и вычислительная техника», № 8, М., «Машиностроение», 1968.

2. Бойков А. Д., Егупов Н. Д. Метод реализации многомерной аналитической самонастраивающейся системы автоматического управления. Труды КуАИ им. С. П. Королева, вып. 29, Куйбышев, 1967.

3. Бойков А. Д. Восстановление сигналов на входе многомерных динамических измерительных систем. Автоматизация экспериментальных исследований. Тезисы докладов Всесоюзной научно-технической конференции (8—11 июня 1971 года), Куйбышев, 1971 г.

4. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Финитные функции в физике и технике. М., «Наука», 1971.