

В. И. Орищенко, В. П. Сабилло

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРИ СИНТЕЗЕ АЛГОРИТМОВ СЖАТИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ НА ОСНОВЕ СТРУКТУРНЫХ СВОЙСТВ СИГНАЛОВ

Для большого круга задач обработки измерительной информации реальные сигналы на выходах измерительных устройств могут быть с достаточной для практических целей точностью представлены степенными полиномами. Это вызывает необходимость детального изучения возможностей, которые дает применение такой модели сигнала для обработки различной измерительной информации.

В работе рассмотрены вопросы анализа и синтеза алгоритмов адаптивной дискретизации, использующих интегральные операторы, для сигналов, которые на отрезках дискретизации описываются полиномами, наибольшая степень которых не выше трех. Для восстановления дискретизированного сигнала используется кусочно-линейная аппроксимация, причем точки изломов представляют собой начальные и конечные отсчеты отрезков аппроксимации. Фиксация самих отсчетов производится в моменты времени, когда максимальная ошибка равномерного приближения сигнала линейной моделью достигает допустимого значения. Следовательно, одной из основных задач при адаптивной дискретизации является получение оценки этой максимальной ошибки.

Отсюда можно предположить, что для решения задач анализа и синтеза алгоритмов адаптивной дискретизации необходимо построить в одних и тех же координатах оценки максимальной ошибки приближения для различных алгоритмов и ее действительную величину. В работе [1] с позиции структурных свойств сигналов рассматриваются общие положения нахождения таких координат. В настоящей статье предлагается следующая методика.

Пусть сигнал представляется на интервале $[0, T]$ в виде

$$y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3.$$

Рассмотрим приведенный сигнал $S(t)$.

$$s(t) = y(t) - y(0) = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3, \quad (1)$$

т. е. для оценки погрешности приближения используются два отброшенных члена ряда. Такое приведение не повлияет на общность последующих рассуждений.

Тогда сигнал $x(t)$, которым равномерно приближается $s(t)$ на отрезке дискретизации

$$x(t) = \frac{s(T)}{T} t, \quad (2)$$

где T — отрезок адаптивной дискретизации.

Ошибку приближения $s(t)$ сигналом $x(t)$ на отрезке O, T можно записать в следующем виде:

$$\varepsilon(t, T) = a_2 t^2 + a_3 t^3 - (a_2 T + a_3 T^2) t. \quad (3)$$

Момент времени t , при которых $\varepsilon(t, T)$ принимает экстремальные значения, определяются из (3)

$$t_{m_{1,2}} = -\frac{1}{3} \frac{a_2}{a_3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2 + \frac{1}{3} \frac{a_2}{a_3} T + \frac{1}{3} T^2}.$$

Примем $\frac{a_2}{a_3 T} = Z$, тогда

$$t_{m_{1,2}} = -\frac{1}{3} ZT \pm \sqrt{\frac{1}{9} Z^2 T^2 + \frac{1}{3} ZT^2 + \frac{1}{3} T^2}. \quad (4)$$

Области интересующих нас значений Z , т. е. когда $0 < t_m < T$ определяются из (4),

$$\begin{aligned} -2 < z < \infty, & \text{ для } t_{m_1}; \\ -\infty < z < -1 & \text{ для } t_{m_2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя (4) (3), получим выражения $\varepsilon(t_m, T)$ для двух ветвей значений t_m .

$$\varepsilon(t_{m_1}, T) = a_3 T^3 \left[\frac{1}{3} \left(-\frac{2}{9} z^3 + z^2 + z \right) + 2 \sqrt{\left(\frac{1}{9} z^2 + \frac{1}{3} z + \frac{1}{3} \right)^3} \right]; \quad (6)$$

$$\varepsilon(t_{m_2}, T) = a_3 T^3 \left[\frac{1}{3} \left(-\frac{2}{9} z^3 + z^2 + z \right) + 2 \sqrt{\left(-\frac{1}{9} z^2 + \frac{1}{3} z + \frac{1}{3} \right)^3} \right]. \quad (7)$$

Нормируя (6) и (7) к $a_3 T^3$, получаем необходимые нам координаты. Зависимость $\varepsilon(t_m, T)/a_3 T^3 = f(z)$ приведена на рис. 1.

Штриховыми линиями обозначены части кривых, являющиеся перабочими, т. е. для них значения Z выходят за границы областей (5).

На рис. 2 приведена кривая зависимости $\left| \frac{\varepsilon(t_m, T)}{a_3 T^3} \right| = f(z)$ для анализируемых значений z .

В точке $z = -1,5$; $\left| \frac{\varepsilon(t_m, T)}{a_3 T^3} \right| = f(z)$ терпит разрыв производной.

В указанных координатах строятся оценки максимальной ошибки приближения сигнала $s(t)$ функцией $x(t)$ на отрезке дискретизации, которые получаем для различных алгоритмов, использующих линейные комбинации интегральных операторов и значений самого сигнала в конечных точках отрезков дискретизации.

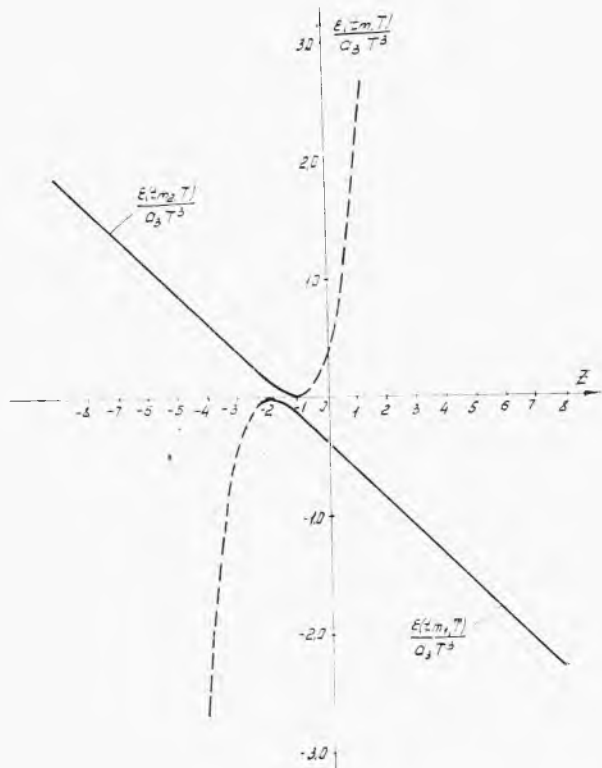


Рис. 1

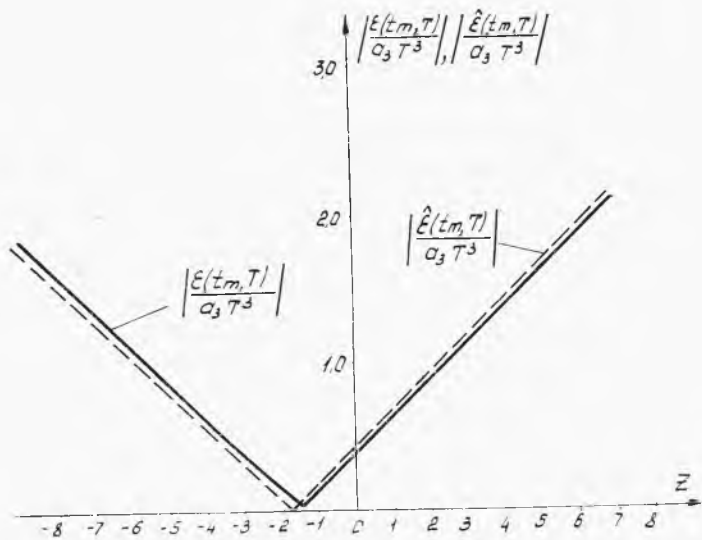


Рис. 2

Вид интегрального оператора в работе [1] принят следующим:

$$A = \frac{r+2}{T^{r+1}} \int_0^T s(t) dt,$$

где r — числа вещественной оси.

Алгоритм получения оценки максимальной ошибки приближения [1].

$$\hat{\varepsilon}(t_m, T) = \beta \left[\frac{r+2}{T^{r+1}} \int_0^T s(t) t^r dt - s(T) \right], \quad (8)$$

Оценка является приближенной. В принятых ранее координатах $\hat{\varepsilon}(t_m, T)$ линейно зависит от Z .

$$\frac{\varepsilon(t_m, T)}{a_3 T^3} = \beta \left[-\frac{1}{r+3} z - \frac{2}{r+4} \right]. \quad (9)$$

На рис. 2 приведена зависимость $\left| \frac{\hat{\varepsilon}(t_m, T)}{a_3 T^3} \right| = f(z)$ для $r=1$ и $\beta=1$

$$\text{Пусть } Q(z) = \frac{|\varepsilon(t_m, T)| - |\hat{\varepsilon}(t_m, T)|}{|\varepsilon(t_m, T)|}. \quad (10)$$

Из анализа выражения (10) можно сделать вывод об эффективности оценок различными алгоритмами максимальной ошибки приближения. Задача же синтеза алгоритмов адаптивной дискретизации таким образом сводится к поиску алгоритмов, которые позволяли бы минимизировать выражение (10) по принятому критерию для определенных интервалов значений z .

Следует оговорить, что процедура минимизации должна производиться с учетом закона распределения z , который зависит от соотношения a_2 и a_3 и величины допустимой ошибки приближения на отрезке дискретизации.

В частности при минимизации среднеквадратичного значения (10) для равномерного закона распределения z на интервале $[-10, 10]$ были получены следующие оптимальные параметры для алгоритма (8) $\beta=0,811$, $r=0$. Среднеквадратичное значение $Q(z)$ определяется

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{20} \int_{-10}^{10} Q^2(z) dz} = 0,11.$$

Алгоритм получения $\hat{\varepsilon}(t_m, T)$

$$\hat{\varepsilon}(t_m, T) = 0,811 \left[\frac{2}{T} \int_0^T s(t) dt - s(T) \right]. \quad (11)$$

Для сравнения приведем, что при $\beta=1$ и $r=1$ δ составляет уже 0,18.

Используя нелинейные комбинации (8) при различных значениях r можно добиться еще большего уменьшения величины σ .

Так, $\varepsilon(t_m, T) = f(z)$ представляет собой предельный случай таких комбинаций, когда $\sigma=0$. Величина z определится из системы уравнений

$$\begin{cases} k_1 = \frac{r_1+2}{T^{r_1+1}} \int_0^T s(t) t^{r_1} dt - s(T) \\ k_2 = \frac{r_2+2}{T^{r_2+1}} \int_0^T s(t) t^{r_2} dt - s(T). \end{cases}$$

Если закон распределения z есть дельта-функция, то становится возможным получение точных оценок максимальной ошибки приближения с использованием только алгоритма (8).

Рассмотрим два предельных случая распределения z .

$$1. a_2=0, a_3 \neq 0 \quad p(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z=0 \\ 0 & \text{при } z \neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{\varepsilon(t_m, T)}{a_3 T^3} = f(z=0) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (9) получаем для $\beta=1$

$$\frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{r}{r+4}.$$

Отсюда $r = 3\sqrt{3} - 4$.

Следовательно, алгоритм (8), позволяющий получать точную оценку ошибки приближения, запишется

$$\hat{\varepsilon}(t_m, T) = \varepsilon(t_m, T) = \frac{3\sqrt{3}-2}{T^3 \sqrt{3}-3} \int_0^T s(t) t^{3\sqrt{3}-4} dt - s(T). \quad (13)$$

Зависимости, позволяющие оценить эффективность различных алгоритмов, в этом случае приведены на рис. 3.

$$2. a_2 \neq 0; a_3 = 0 \quad p(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } |z| = C \\ 1 & \text{при } |z| \rightarrow \infty, \end{cases}$$

где C — константа.

Численный анализ (10) показывает, что для $\beta=1$ и $r=1$ алгоритм (8) запишется $Q(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$

$$\hat{\varepsilon}(t_m, T) = \varepsilon(t_m, T) = \frac{3}{T^2} \int_0^T s(t) dt - s(T) \quad (41)$$

Зависимости, позволяющие оценить эффективность алгоритмов, приведены на рис. 4.

Выражения (13), (14) были получены в работе 1 на основе других соображений.

Таким образом, в работе показана возможность анализа эффективности оценки приближения линейной зависимостью полиномов, степень которых не превышает трех, алгоритмами адаптивной дискретизации, использующими интегральные операторы.

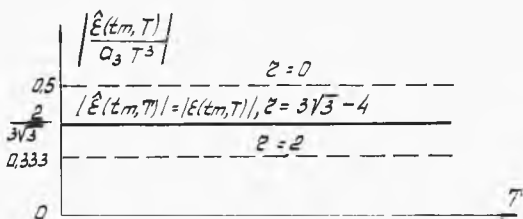


Рис. 3.

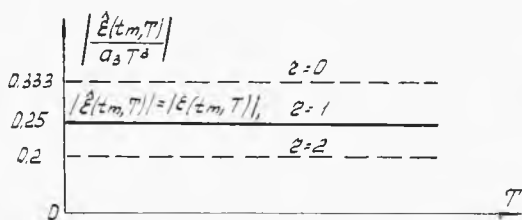


Рис. 4.

Результаты анализа показали, что при локальных распределениях отношения a_2/a_3T возможен синтез алгоритмов, использующих линейные комбинации интегральных операторов с самим сигналом, позволяющих получать близкие к точным

оценки максимальной ошибки приближения. Для «размытых» распределений точность оценок существенно ухудшается.

Использование нелинейных комбинаций, интегральных операторов из самого сигнала позволяет получить более точные оценки максимальной ошибки приближения, но приводит к усложнению алгоритмов, а следовательно, и к трудностям их практической реализации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Витих, В. А., Якимха В. П. Синтез алгоритмов сжатия измерительной информации на основе использования структурных моделей сигналов. «Известия вузов». «Приборостроение». № 3, 1972.

В. В. Пшеничников

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕДУРЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СИГНАЛОВ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

При динамических измерениях сигнал, проходя по тракту измерительной системы, искажается вследствие инерционности некоторых звеньев системы (например, датчиков). Одна из