15. Г и н з б у р г А.Н., Р о д и о н о в Ю.И. Система графического редактирования печатных плат.- В сб.:Системы автоматизации научных исследований. ИАиЭ СО АН СССР, Новосибирск, 1976.

С.М. Д у б и н а

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ГРАФОВ ДЛЯ АВТОМАТИЗАЦИИ СИНТЕЗА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ

(К у й б ы ш е в)

Формализованное описание проблемы автоматизации проектировочных расчетов, данное в работе [1], позволило поставить задачу автоматического поиска минимального набора зависимостей,необходимых для вычисления значений некоторого множества параметров по значениям другого множества параметров [2]. Решение этой так называемой задачи планировщика является одной из основных проблем при создании автоматизированных систем проектирования.

1. Пусть F множество зависимостей "с одним выходом", описывающих технический объект (формулы, алгоритмы, таблицы), а A - множество входящих в эти зависимости параметров. Будем считать, что все зависимости из F независимы между собой и непротиворечивы в том смысле, что для определения значений любого множества X параметров из F необходимо и достаточно получение системы k зависимостей из F, содержащих k неизвестных параметров, среди которых содержатся параметры X. Назовем такую систему замкнутой (ЗС). Взаимосвязь F и A удобно представить в виде двудольного графа G (F , A), одно из множеств вершин которого соответствует F , а другое - A . Если $f \in F$ содержит $x \in A$, то ребро графа соединяет соответствующие вершины. Паросочетанием графа называется подмножество его ребер, не смежных друг с другом [3].

Алгоритм поиска минимальной ЗС, определяющей значения параметров из X , с использованием графа G (F , A) состоит в следующем:

1) из G (F , A) удаляются соответствующие заданным параметрам вершины вместе с инцидентными им ребрами;

2) для полученного графа G (F , A') строится максимальное паросочетание R ;

3) непокрытые паросочетанием R вершины из A' удаляются из графа вместе со смежными им в F вершинами и инцидентными ребрами до тех пор, пока в оставшемся графе G (F_B , A_B) не будут покрыты с помощью оставшейся части R все вершины.

F_B соответствует ЗС. Если $X \notin A_B$, то задача не может быть решена в полном объеме, так как вычисление значений параметров из $X \setminus A_B$ невозможно. Назовем описанный алгоритм "отбраковывающим".

Если F_B содержит в себе ЗС F_B^1 с меньшим числом зависимостей, то применив отбраковывающий алгоритм с $F_B \setminus \{f_e\}$,где $f_e \notin F_B^1$, выделим F_B^1 . Если не существует f_e такой, что из $F_B \setminus \{f_e\}$ выделяется ЗС, то F_B минимальна. Последняя F_B^i , содержащая все параметры из X , является минимальной ЗС.

2. Основой отбраковывающего алгоритма является нахождение максимального паросочетания, которое связано с минимальным покрытием графа.

Пусть дан граф G без петель и изолированных вершин. Двудольный граф - частный случай такого графа. Пусть V - множество вершин G , а E - множество ребер, назовем $P \subseteq E$ покрывающим множеством графа, если $(\forall a \in V)(\exists e \in P)[e$ инцидентно $a]$. Назовем покрывающее множество P покрытием, если никакое его истинное подмножество не является покрывающим множеством. Покрытие с минимальным числом ребер - минимальное покрытие графа.

Л е м м а. Пусть P - покрытие n -вершинного графа. Тогда минимальное число ребер, которое нужно удалить из P для получения паросочетания, равно $2|P|-n$, где $|P|$ - число ребер в P .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сумма степеней вершин суграфа, определяемого покрытием P , равна $2|P|$. При паросочетании степени вершин соответствующего суграфа не превосходят I, следовательно, число "избыточных" ребер не меньше $2|P|-n$. В силу определения покрытия их не может быть больше.

Т е о р е м а I. Минимальное покрытие графа - надмножество его максимального паросочетания.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в графе G с n вершинами найдено минимальное покрытие P , $|P|=p \geqslant n/2$. Пусть в P имеется k групп смежных ребер. Каждая группа инцидентна некоторой вершине. Удалив в каждой группе все ребра, кроме одного, получим из P паросочетание R. Согласно лемме удалено $s=2p-n$ ребер. Паросочетание R - максимально и имеет $p-s=n-p$ ребер. Действительно, пусть существует паросочетание с $n-p+1$ ребром. Эти ребра не смежны и покрывают $2(n-p+1)$ вершин, для остальных $n-2(n-p+1)=$ $=2p-n-2$ вершин можно выбрать такое же количество покрывающих ребер. Следовательно, получим новое покрытие P' с $|P'|=(n-p+1)+$ $+(2p-n-2)=p-1$ ребрами, что противоречит минимальности P.

Обратно, если найдено максимальное паросочетание R с r ребрами, то оно покрывает $2r\leqslant n$ вершин. Добавив $n-2r$ ребер, инцидентных непокрытым вершинам, получим покрытие P. Используя лемму, методом от противного легко доказать минимальность P.

Согласно теореме I, из минимального покрытия легко получить максимальное паросочетание. Для числа ребер минимального покрытия P очевидна нижняя оценка: $|P|=]n/2[$, где $]x[$ - минимальное целое не меньшее x.

Т е о р е м а 2. Если граф G имеет гамильтонову цепь, то число ребер его минимального покрытия P равно $]n/2[$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть граф G имеет гамильтонову цепь. Суграф, состоящий из ребер этой цепи, имеет степени вершин, не превосходящие 2. Выбрав вершину суграфа графа G со степенью I и начав с нее, построим чередующуюся цепь [3], определяющую максимальное паросочетание R. Если R покрывает все вершины графа, то это минимальное покрытие P (теорема I) с числом ребер $n/2$. В противном случае может быть непокрыта только I вершина, следовательно, число ребер $|P|=\frac{n+1}{2}$. Теорема доказана.

Теорема 2 позволяет построить следующий алгоритм вычисления верхней оценки числа ребер минимального покрытия и нахождения покрытия, соответствующего ей:

а) из множества вершин со степенями, большими 2, выбирается вершина с минимальной степенью;

б) устранением ребер степень вершины приводится к 2 (переход к п.а.);

в) после приведения степеней вершин к 2 для каждой из компонент полученного суграфа (включая и изолированные вершины) вычисляются оценки:

$$P_i=]\frac{n_i}{2}[\,, \tag{I}$$

где n_i - число вершин в i -той компоненте суграфа.
Верхняя оценка для числа ребер минимального покрытия исходного графа равна $\sum p_i$.

Действительно, так как компоненты суграфа представляют собой гамильтоновы цепи, то по теореме 2 для них легко построить минимальные покрытия, соответствующие (I). Изолированные вершины суграфа могут быть покрыты любым инцидентным им в исходном графе ребром. Так, получим покрытие P исходного графа, соответствующее верхней оценке. Если нижняя и верхняя оценки совпадают, то P минимально. В противном случае можно моделировать алгоритм Лемке-Шпильберга [4] для поиска минимального покрытия.Модификация-алгоритм состояний в построении дерева решений (ДР),начиная с первого уровня, в котором располагается его корень, k - й уровень (ярус) ДР соответствует выбору k ребер покрывающего множества. Для ограничения числа рассматриваемых вариантов используются верхняя и нижняя оценки. Первоначальным значением критерия планомерного исключения вариантов (КПИ) [4]служит верхняя оценка числа ребер минимального покрытия, а в последствии - меньшее число ребер покрывающего множества. Критерий предпочтения [4] реализуется путем задания порядка на множестве ребер. Критерий недопустимости не используется.

Рассмотрим формальную схему алгоритма.

<u>Шаг 0.</u> $P=\phi$. Выбираются вершины с минимальной степенью. Из них выбирается такая, у которой меньше сумма степеней смежных вершин. Выбранная вершина определяет корень ДР. Все инцидентные ей ребра упорядочиваются в порядке возрастания суммы локальных степеней инцидентных им вершин. Это ряд, соответствующий корню ДР. Остальные шаги алгоритма одинаковы. Опишем k - й шаг.

<u>Шаг k .</u> Если уровень узла ДР, в котором мы находимся, на 1 меньше значения КПИ, или ряд ребер этого узла пуст, то выполняется пунк "а", в противном случае - пунк "б":

а) производится движение "назад" в предыдущий узел ДР (если находились в корне ДР, то задача решена). После возвращения в предыдущий узел первое ребро ряда, соответствующего ему, исключается из P и из ряда. Переход к $k+1$ шагу;

б) выбирается первое ребро ряда, соответствующего узлу ДР, оно включается в P . Если P - покрывающее множество, то выполняются следующие операции: номер уровня принимается за новое значение КПИ (совпадение его с $]n/2[$ означает решение задачи, P - минимальное покрытие), P заменяет предыдущее покрывающее множество, переходят к пункту "а". В противном случае производится движение "вперед" к следующему уровню ДР. Там образовывается новый узел ДР, выбираются из непокрытых множеством P вершин вершины с минимальной степенью. Из них выбирается та, у которой больше покрытых смежных вершин. Эта вершина ставится в соответствие вновь образованному узлу ДР. Инцидентные ей ребра упорядочиваются: сначала располагаются ребра, соединяющие 2 непокрытие вершины, в порядке возрастания суммы степеней инцидентных им вершин, затем в таком же порядке - остальные ребра. Полученный ряд ребер ставится в соответствие данному узлу ДР. Переход к следующему шагу.

Найденное по алгоритму покрывающее множество, соответствующее значению КПИ, - минимальное покрытие графа.

Литература

1. Т ы у г у Э.Х. Решение задач на вычислительных моделях. ЖВМ и МФ, т. 10, № 3, М., 1970, с. 716-733.
2. Д у б и н а С.М., П и я в с к и й С.А. Алгоритмические вопросы создания системы автоматизации проектирования сложных технических объектов. Депонированная рукопись № 173 ЦНИИТЭИприборостроения (реф. 12Г605, РЖ "Кибернетика", № 12, 1974).
3. Б а с а к е р Р., С а а т и Т. Конечные графы и сети. М., "Наука", 1974, с. 226-229.
4. К о ф м а н А., А н р и - Л а б о р д е р А. Методы и модели исследования операций. М., "МИР", 1977, с.60-74.