

В.А. Комаров, В.П. Пересыпкин
КОМПЛЕКС ПРОГРАММ РАСЧЕТА АВИАЦИОННЫХ
КОНСТРУКЦИЙ ПРАСАК

Современное состояние МКЭ. Метод конечных элементов (МКЭ) в приложении к расчетам напряженно-деформированного состояния (НДС) появился в середине 50-х годов как наиболее удачное сочетание идей кусочно-гладкой аппроксимации функций с матричными методами расчета упругих дискретных систем. Близкие подходы используются также в других эффективных численных методах: конечных разностей, коллокаций, вариационных методах Релея-Ритца, Галеркина, разностно-вариационных, которые в той или иной степени предвосхитили идеи МКЭ и явились исторически необходимыми для его появления.

К первым трудам по МКЭ обычно относят работы Аргириса [1], Тернера [2], Клаффа [3]. Однако имеются ранние публикации Хренникова [4] и Куранта [5] с одной стороны и Феофанова [6], Смирнова [7] с другой стороны, которые также можно отнести к числу основополагающих.

Большое число публикаций, обеспечивающих развитие МКЭ и внедрение его в расчетную практику, собрано в библиографических указателях [8], [9] и монографиях [10], [11], [12], [13].

МКЭ в его современном состоянии позволяет решать практически любые задачи механики твердого деформируемого тела.

Особенно полезным МКЭ оказывается в расчетах сложных пространственных комбинированных систем. Для многих авиационных конструкций в связи с резким ростом требований к ресурсу стал необходимым подробный анализ напряжений, особенно в зонах стыков агрегатов планера и всевозможных концентраторов. Решение подобных задач с нужной точностью часто обеспечивается только МКЭ.

Основные идеи метода легко усваиваются инженерами. МКЭ избавляет их от необходимости использования часто небесспорных упрощающих предположений при построении расчетных моделей, дает представление о силовой работе конструкции в целом, что очень важно для принятия проектных решений. Поэтому МКЭ и у нас и за рубежом очень быстро стал основным методом анализа НДС в авиационных проектных организациях. Интенсивно разрабатываемые сейчас системы

автоматизации проектных работ используют МКЭ в качестве основного прямого метода [14].

Однако при всей простоте основных соотношений метода, его реализация на ЭВМ по ряду причин оказывается достаточно сложной.

Проблемы реализации. В реализации можно выделить три ключевых момента:

- вычислительные алгоритмы;
- обработка и хранение больших массивов информации;
- подготовка сложных исходных данных и представление результатов расчета.

Расчеты сложных пространственных конструкций с достаточной точностью требуют создания конечноэлементных моделей (КЭМ) с числом неизвестных параметров в несколько тысяч и даже десятков тысяч.

Для решения получающихся при этом систем разрешающих уравнений требуется создание специальных методов. В последнее время большие успехи достигнуты благодаря использованию свойства разреженности систем разрешающих уравнений МКЭ. Особенно популярными при реализации МКЭ являются ленточные и фронтальные алгоритмы методов исключения, которые особенно выгодны при расчете сравнительно простых объектов, порождающих матрицу жесткости узколенточного вида. Однако для нерегулярных сложных конструкций эффективность этих методов уменьшается из-за увеличения ширины ленты или фронта.

Другим важным вопросом реализации численных методов является их устойчивость при больших последовательных вычислениях, что становится особенно важным при расчетах пространственных тонкостенных упругих систем с большим числом неизвестных параметров.

Кроме того, как показывает опыт, описание конечными элементами комбинированных систем и, в частности, планера самолета, часто приводит к моделям, близким к механизмам, что порождает, в свою очередь, вырожденные или близкие к ним матрицы жесткости.

Поэтому дальнейший прогресс в реализации МКЭ требует постоянных исследований, во-первых, по разработке алгоритмов с большим быстродействием и, во-вторых, по обеспечению устойчивости вычислений.

Большие объемы входной и выходной информации, связанные не столько со спецификой МКЭ, сколько с нерегулярностью и неоднород-

ностью авиационных конструкций, большие объемы промежуточной информации (система разрешающих уравнений, например) заставляют говорить о реализации МКЭ как о задаче обработки информации. При этом, простая, казалось бы, операции хранения, выборки, сортировки существенно определяют технические и экономические показатели программного обеспечения и поэтому требуют применения специальных методов и исследований для их оптимизации.

От формы представления входной и выходной информации зависит удобство и, самое главное, скорость отладки исходных данных и анализа результатов расчета. При недостаточном внимании к этим вопросам они становятся основными ограничениями размеров решаемых задач.

Все возникающие при реализации проблемы должны решаться во взаимосвязи и на одинаково высоком уровне, так как эффективность системы определяется ее самым слабым местом.

Т р е б о в а н и я к к о м п л е к с у П Р А С А К

Работы по созданию комплекса ПРАСАК на ЭВМ типа БЭСМ-4 и М-222 были начаты в 1970 году на кафедре конструкций самолетов Куйбышевского авиационного института. В предшествующий период с 1964 года велись расчеты авиационных конструкций в содружестве с проектными организациями. Расчеты делались на первых ЭВМ по отдельным программам. Несмотря на скромность вычислительных средств к 1970 году были рассчитаны все основные агрегаты планера, включая расчет летательного аппарата как единого целого, правда, на относительно грубых сетках с числом элементов от 50 до 500.

На основе накопленного опыта и с учетом запросов проектной практики требования к создаваемому комплексу ПРАСАК были сформулированы следующим образом:

1. Универсальность, т.е. возможность расчета самых разнообразных конструкций, агрегатов и деталей планера.
2. Возможность постоянного развития системы для решения все более широкого класса задач.
3. Эффективность алгоритма, программ и распределения ресурсов ЭВМ для обеспечения решения достаточно больших задач.
4. Простота подготовки, контроль и документализация исходных данных.

5. Возможность выдачи результатов расчета на хорошо отредактированные листинги с разной степенью полноты, включая максимальную возможность выдачи основных результатов расчетов в наглядном виде с помощью графических средств.

6. Возможность использования блоков схемы, реализующих расчет НДС в линейно-статической постановке, при распространении системы на решения нелинейных и динамических задач.

О с н о в н ы е п р и н ц и п ы и т е х н и ч е с к и е р е ш е н и я

В описываемом комплексе программ предпочтение было отдано методу перемещений, так как на его основе, по мнению авторов, проще удовлетворить всей совокупности выдвинутых здесь требований.

Специальные меры, направленные на обеспечение выполнения отдельных требований рассматриваются ниже.

Универсальность комплекса обеспечивается следующими мерами:

- а) возможностью произвольных узловых неизвестных;
- б) организацией открытой библиотеки конечных элементов (КЭ);
- в) возможностью произвольной связи разнотипных элементов между собой при помощи общих узловых неизвестных.

В ПРАСАКе набор узловых неизвестных каждого типа конечных элементов определяется непосредственно в процедуре получения матрицы жесткости элемента. Программным путем каждое неизвестное перемещение обозначается номером узла и символом неизвестного — поступательного смещения, угла поворота и т.д. Символ образуется из трех и более произвольных алфавитно-цифровых знаков. Например, $123U$, $456PSI$ и т.д. При таком подходе может быть использован неограниченный набор узловых неизвестных в пронумерованных узлах. Кроме того, предусмотрена возможность вводить неизвестные перемещения во вспомогательных узлах, не имеющих своего номера. Например, для перемещения "U" вспомогательного узла между узлами с номерами i и j можно образовать обозначение iUj . При дополнительном условии типа $i < j$ это неизвестное получает единственно возможное обозначение. Список неизвестных КЭМ образуется объединением неизвестных для всех конечных элементов.

Открытость библиотеки конечных элементов обеспечивается тем, что матрица жесткости каждого отдельного типа элемента вычисляет-

ся по специальной подпрограмме. При этом, однако, все операции по обмену информацией выполняет общий модуль более высокого уровня.

Соединения конечных элементов между собой осуществляются автоматически при совпадении обозначений узловых неизвестных. При этом типы, пространственная ориентация и число соединяемых конечных элементов могут быть произвольными.

Возможность развития системы обеспечивается:

- а) блочной структурой организации программ;
- б) использованием блоков разных уровней;
- в) организацией обменов информацией между основными блоками-модулями через внешнюю память.

Каждый программный блок-модуль реализует сравнительно небольшую часть общего алгоритма, которая может быть легко запрограммирована и отлажена независимо от остальных частей. Обмен информации через внешнюю память позволяет добиться большей взаимной независимости модулей, в частности отпадает необходимость распределения оперативной памяти между ними.

Вывод и передача управления модулям осуществляется сравнительно простой управляющей программой. Сами модули могут вызывать программы более низкого уровня - подпрограммы, которые размещаются в оперативной памяти вместе с вызывающим модулем, получают от него информацию и после работы передают ему результаты. Примером являются подпрограммы получения матриц жесткости каждого типа конечных элементов, выполняющие чисто вычислительные процедуры. Эти подпрограммы вызываются модулем получения матриц жесткости, который выполняет функции общие для всех типов элементов - ввод исходных данных из внешней памяти, вызов нужной подпрограммы, посылку полученных матриц на хранение. Наконец, в программах всех уровней используются стандартные библиотечные программы.

Такая структура комплекса позволяет легко писать и отлаживать программы, модернизировать старые, добавлять новые, расширять библиотеку конечных элементов, увеличивать число программных уровней как вверх, так и вниз.

Повышение эффективности программ достигается:

- а) обоснованным распределением ресурсов ЭВМ для хранения различных видов информации;
- б) страничным принципом обмена информацией;
- в) использованием свойства разреженности суммарной матрицы

жесткости (СМЖ) для ее представления и хранения в памяти ЭВМ;

г) быстрым алгоритмом получения СМЖ;

д) эффективным методом решения системы линейных уравнений.

Большие объемы информации требуют использования всех видов памяти ЭВМ, включая магнитные барабаны и ленты. При этом в ПРАСАКе конкретный носитель для каждого вида информации определен с учетом его объема, частоты выборки, а необходимость ее хранения установлена в зависимости от времени возобновления конкретного типа информации. Для снижения потерь времени при поиске информации на внешних носителях широко применяется блокирование информации. При этом каждая единица обмена информации — страница — снабжается необходимыми индексами и описаниями, позволяющими использовать каждую страницу информации независимо от других.

Для повышения скорости решения системы уравнений и сокращения потребного объема памяти используется разреженность суммарной матрицы жесткости. Хранятся только ненулевые коэффициенты матрицы и их ключи — индексы строк и столбцов. Причем индекс строки является ключом для всей строки, а индекс столбца ключом для каждого коэффициента. Если учесть, что для хранения индексов требуется гораздо меньшая длина слова, чем для хранения самих коэффициентов матрицы, то такое представление является, возможно, самым экономным для больших матриц.

Для формирования кодированной СМЖ из матриц жесткости отдельных элементов разработан специальный алгоритм ступенчатой внешней сортировки, минимизирующей время работы процессора и время обмена информации с внешней памятью. Сущность ступенчатой сортировки состоит в том, что строка суммарной матрицы жесткости непосредственно набирается из матриц жесткости конечных элементов, а этому предшествуют несколько промежуточных этапов-ступеней. На первой ступени из матриц жесткости всех элементов набираются коэффициенты для ряда строк СМЖ. Затем, на следующей ступени, из полученного массива выбираются коэффициенты для меньшего числа строк. Наконец на последней ступени набираются коэффициенты для отдельных строк СМЖ и производится суммирование коэффициентов с одинаковыми индексами столбцов. Количество ступеней сортировки и размеры промежуточных массивов могут рассматриваться как проектные переменные соответствующей задачи параметрической оптимизации. Удастся показать, что рациональный выбор этих параметров дает

выигрыш машинного времени по сравнению с простой сортировкой более чем в 10^2 раз для задач с числом неизвестных 3000, в основном за счет сокращения обращений к внешним запоминающим устройствам.

Решение системы уравнений осуществляется специально разработанным методом блочной последовательной верхней релаксации (БПВР) с регулированием коэффициента релаксации в процессе решения [15]. Метод БПВР оказался весьма эффективным и вполне конкурентноспособным с методами исключения. Причем при повышении порядка разрешающей системы уравнений выявляется преимущество БПВР в быстродействии. Эффективность метода обеспечивается более экономным кодированным представлением суммарной матрицы жесткости по сравнению с ленточным и использованием блочного представления системы уравнений, учитывающего нерегулярность и неоднородность рассчитываемых конструкций. Скорость сходимости метода БПВР на один, два порядка выше, чем неблочных итерационных методов. Так, решение системы уравнений с числом неизвестных до 3000 требует от 50 до 200 итераций для уменьшения невязок на 5 порядков.

Важной особенностью метода является то, что он позволяет рассчитывать незакрепленные и геометрически или мгновенно изменяемые конструкции, т.е. тогда, когда СМЖ становится вырожденной. Небольшая неуравновешенность конструкции, т.е. несовместность системы разрешающих уравнений допускается. Получаемое решение в случае вырожденности СМЖ оказывается близким к обобщенному нормальному решению, что обеспечивает наилучшую устойчивость расчета напряженно-деформированного состояния по сравнению с любым из допустимых способов традиционного исключения перемещений конструкции как твердого тела посредством введения искусственных опорных связей [16].

Простота и надежность подготовки исходных данных достигаются:

- а) уменьшением состава информации за счет исключения дублирования;
- б) простотой и естественностью представления информации;
- в) свертыванием информации при ее регулярности;
- г) автоматизацией контроля.

Информация для описания КЭМ делится на два типа: информация об узлах — координаты; информация об элементах — типы конечных элементов, отношение узлов к элементам, жесткостные константы и

другие параметры конечных элементов. Такой набор данных является минимальным, так как он не содержит дублирования информации. При этом принципиальной особенностью комплекса ПРАСАК является то, что при произвольном количестве и типах неизвестных в узле соответствующую информацию в исходных данных указывать не требуется.

Граничные условия – узловые силы и перемещения – задаются их числовыми (только ненулевыми) значениями и вводятся вместе с соответствующими обозначениями узловых перемещений.

Большая часть информации – информация об элементах – для удобства подготовки представляется в виде отдельных страниц. Страница – это таблица чисел, каждая строка которой содержит всю информацию об одном конечном элементе. В страницу включаются до 20–70 элементов одного типа. При регулярности конструкции или отдельных ее частей данные в страницах оказываются регулярными по столбцам. Это широко используется для свертывания информации, что значительно сокращает ее объем. Простое и естественное представление информации, требующее знания теории МКЭ в минимальном объеме и не требующее изучения специальных входных языков и сложных приемов кодирования информации, существенно облегчает обучение технических исполнителей расчетов в условиях проектных организаций. Кроме того простая структура информации, не содержащая дублирования, существенно облегчает проверку и исправление ошибок в исходных данных.

Большое внимание уделено автоматизации контроля исходных данных. Для диагностики используются известные свойства исходной информации типа: "все узлы треугольного элемента должны иметь разные номера", специально вводимая небольшая избыточная информация и графопостроитель.

Удобство и глубина анализа результатов расчета обеспечиваются:

- а) полнотой выходной информации;
- б) тщательным редактированием листингов;
- в) специальными формами графического представления результатов.

На разных стадиях использования расчетов в конструкторских бюро необходима самая различная информация о напряженно-деформированном состоянии конструкции. Поэтому листинги результатов тщательно отредактированы и содержат наиболее полную информацию, ха-

рактерную для каждого элемента.

Например, листинг результатов мембранного четырехугольного элемента содержит значения компонентов напряжений потоков главных усилий и эквивалентных напряжений в середине элемента. Кроме того, значения эквивалентных напряжений даются в угловых точках. Для элемента, моделирующего балки, шпангоуты и лонжероны выводятся изгибающий момент, поперечная и продольная силы, усилия и напряжения в поясах, поток касательных сил и касательных напряжений в стенке. Для элемента, моделирующего пластинки и оболочки, работающие по Кирхгофу, выдается на печать 23 характеристики напряженного состояния и силовых факторов в разных точках. Вся эта информация нужна для детального анализа НДС.

Для представления работы конструкции в целом удобна, наоборот, сжатая информация. С этой целью предусмотрена выдача на графопостроитель деформированного состояния, потоков главных усилий и т.п.

Возможность расширения системы на решение новых задач обеспечивается блочной структурой, возможностью развития системы вниз и вверх. Эти возможности апробированы решением геометрически нелинейных задач и задач оптимизации конструкций.

Б и б л и о т е к а к о н е ч н ы х э л е м е н т о в

Само название комплекса указывает на его специализацию - расчет авиационных конструкций. Однако такая ориентация ни в коей мере не вызвана его общей архитектурой. Напротив, ПРАСАК предусматривает возможность расчета ансамблей самых различных элементов, а специализация комплекса обусловлена содержанием БКЭ конкретной версии.

Набор конечных элементов, включенных в БКЭ в первую очередь был составлен с учетом таких соображений.

Авиационные конструкции состоят из большого числа различных конструктивных элементов (клетки обшивки, стрингеры, кольцевые и защитные шпангоуты, стенки, ребра, балки и т.п.). Для построения удовлетворительных КЭМ таких "мелкодискретных" по своей природе конструкций необходимо достаточно большое количество элементов. Поэтому при формировании БКЭ, с учетом ограничений по машинному времени и памяти ЭВМ, предпочтение было отдано большому количеству

ву простых элементов перед малым количеством элементов со сложными функциями формы.

Настоящая версия ПРАСАК располагает следующей БКЭ (рис. 1):

1. Стержень с линейной аппроксимацией перемещений [12].
2. Треугольный мембранный элемент с линейной аппроксимацией перемещений [12].
3. Четырехугольный элемент, реализующий постоянный сдвиг. Предназначен для моделирования тонких обшивок и стенок [17].
4. Четырехугольная мембранная изотропная панель [18].
5. Четырехузловой элемент "Двутавр" для моделирования балок, лонжеронов, шпангоутов и других деталей, работающих в условиях плоского изгиба. Поперечное сечение элемента представляет собой идеальный двутавр со стенкой, работающей на растяжение, изгиб и сдвиг.
6. Четырехугольный с прямолинейными сторонами элемент для моделирования оболочек и пластинок. При построении элемента использована гипотеза Кирхгофа.

Все четырехугольные, включая и четырехузловой, элементы имеют прямолинейные стороны, произвольную форму в плане и допускают закрученность.


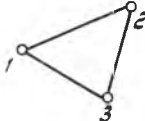
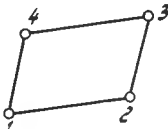
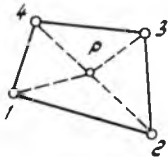
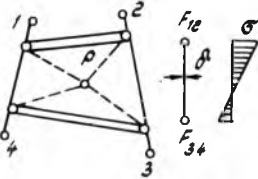
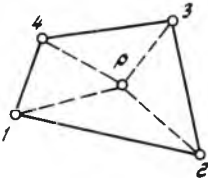
При построении трех последних конечных элементов использовалась аппроксимация четырехугольной панели четырьмя треугольниками с дополнительным узлом в центре элемента.

Все включенные в БКЭ элементы прошли всестороннюю проверку на ряде тестовых задач, в том числе на задачах, имеющих аналитическое решение.

Опыт разработки конечноэлементных моделей, расчетов реальных конструкций, сопоставление результатов расчета с данными натурных испытаний показал, что данный набор элементов позволяет успешно решать не только задачи определения путей передачи сил в многосвязных статически неопределимых конструкциях, но и с достаточной точностью оценивать ее напряженное состояние.

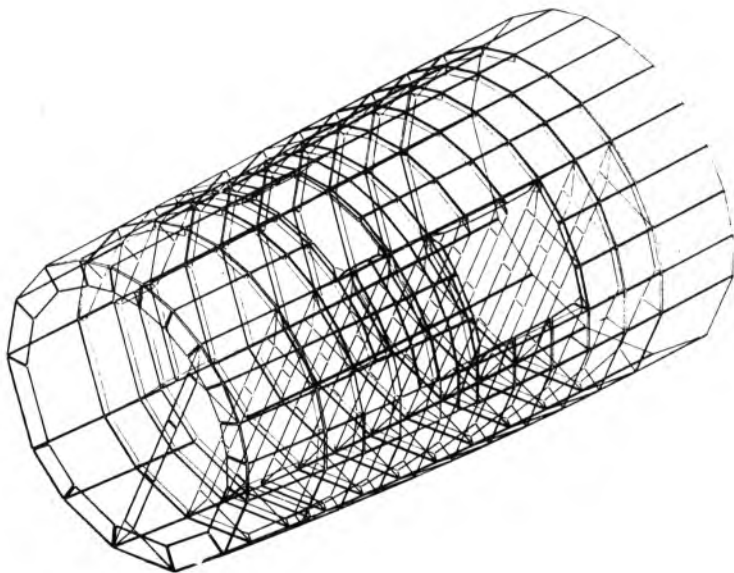
Технические характеристики ПРАСАК

ПРАСАК содержит порядка 60 модулей, с общим числом машинных кодов около 16000. Комплекс и построенная на его основе САПР позволяют решать следующие задачи:

Тип	Схема	Число узлов	Степени свободы	
Стержневой элемент, работающий на растяжение сжатие		2	U, V, W в каждом узле	
Треугольный мембранный изотропный элемент		3	U, V, W в каждом узле	
Четырехугольный сдвига-вой элемент		4	U, V, W в каждом узле	
Четырехугольный мембранный изотропный элемент		4	U, V, W в каждом узле	
Элемент "двутавр"		4	U, V, W в каждом узле	Предназначен для моделирования шпангоутов, лонжеронов, оконтобки вырезов, балок, ребер
Четырехугольный мембранно-изгибный изотропный элемент		4	U, V, W в каждом узле, углы поворота вокруг каждой из сторон в их середине	Для моделирования пластинок и оболочек, работающих по Кирхгофу

1. Расчет НДС произвольных конструкций с учетом симметрии и с числом неизвестных до 3700.
2. Отыскание равнопрочного распределения материала.
3. Оценка веса проектируемых агрегатов планера.
4. Проектирование силовых схем крыльев.

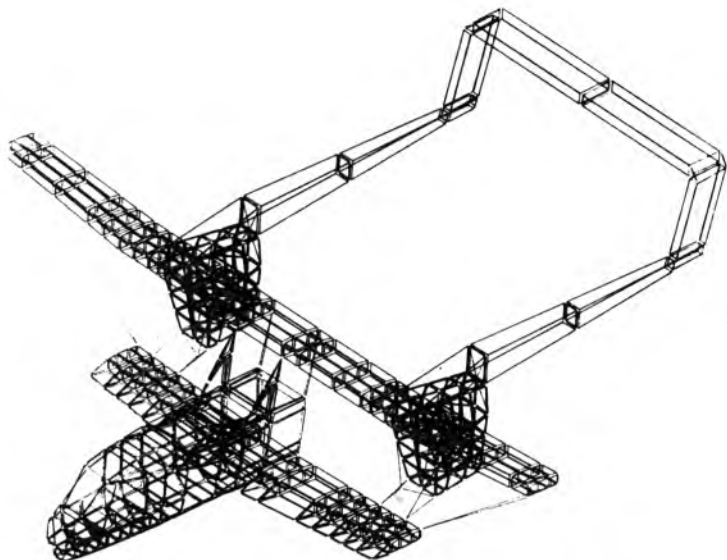
В течение последних четырех лет с помощью комплекса решено более 100 задач с числом неизвестных от 1500 до 3000. Конечно-элементные модели некоторых характерных задач приведены на рис.2-6.



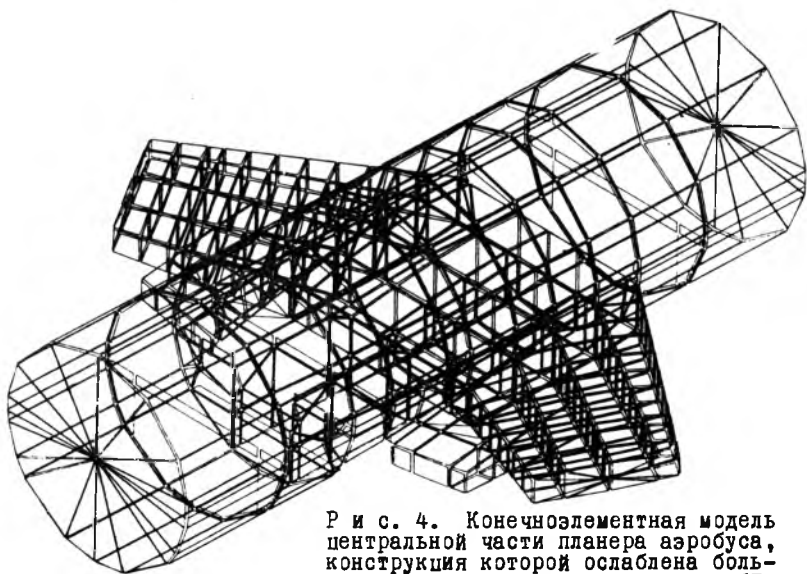
Р и с. 2. Конечноэлементная модель отсека фюзеляжа с тремя вырезами: узлов-550, элементов-1400, неизвестных перемещений-1414

Составление результатов расчетов с данными статиспытаний показало хорошее их совпадение.

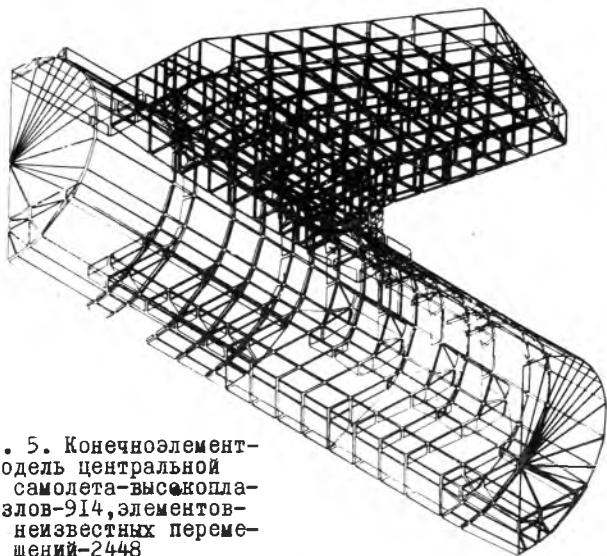
Дополнительные замечания. Большое число и разнообразие решенных задач, широкое внедрение комплекса в проектную практику показали, что требования, предъявленные к нему, и основные технические решения, положенные в его основу, были выбраны правильно. Вместе с тем выяснились практически важные задачи, в которых использование комплекса было достаточно трудоемким. Эти задачи



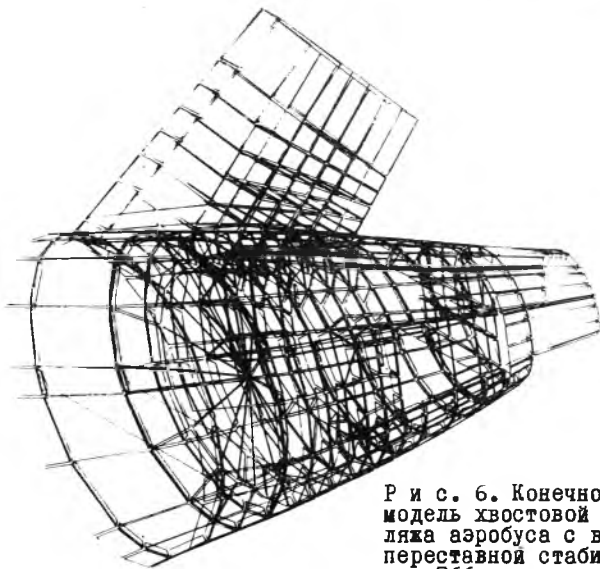
Р и с. 3. Конечноеlementная модель сельскохозяйственного самолета: узлов-658, элементов-1683, неизвестных перемещений-1960



Р и с. 4. Конечноеlementная модель центральной части планера аэробуса, конструкция которой ослаблена большими шассийными вырезами: узлов-670, элементов-1285, неизвестных перемещений-1836



Р и с. 5. Конечноэлементная модель центральной части самолета-высокоплана: узлов-914, элементов-1675, неизвестных перемещений-2448



Р и с. 6. Конечноэлементная модель хвостовой части фюзеляжа аэробуса с вырезом под переставной стабилизатор: узлов-766, элементов-1250, неизвестных перемещений-1961

позволяют сформулировать дополнительные требования к подобным системам.

1. Возможность полного распараллеливания подготовки и отладки исходных данных отдельными лицами и группами.
2. Внесение изменений и дополнений в модель без переполучения заново суммарной матрицы жесткости и полного перерешивания соответствующей системы уравнений.
3. Простое моделирование повреждений типа трещин.

Л и т е р а т у р а

1. Argyzsis. J.H. *Energy Theorems and Structural Analysis. Part I, General Theory.* - "Aircraft Engineering". 1954, Vol. 26. Oct., Nov., 1955, Vol 27, Feb., March, April, May.
2. Tuznez M.J., Clough R.W., Martin H.C., Topp L.J. *Stiffness and Deflection Analysis of complex Structures.* - "J. Aeronaut. Sci.", 23, 805-823 (1956).
3. Clough R.W., *The Finite Element in Plane Stress Analysis, Proc. 2nd ASSE Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh. Pa., Sept. 1960.*
4. Hrennikoff A. *Solution of Problems in Elasticity by the Framework Method.* - "J. Appl. Mech." 1941, Vol. 8, A.p 169-175.
5. Courant R. *Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibration.* - "Bull. Amer. Math. Soc." 1949. Vol. 49 p. 1-23.
6. Ф е о ф а н о в А.Ф. Расчеты тонкостенных конструкций. М., Оборонгиз, 1953.
7. С м и р н о в А.Ф. Статическая и динамическая устойчивость сооружений. М., "Строительство", 1947.
8. Метод конечных элементов в строительной механике и механике сплошных сред. - Информативный обзор, ВНИИГ, Л., 1971.

9. Расчет на прочность конструкций летательных аппаратов с использованием метода конечных элементов. Библиографический список. ЦАГИ, ОНТИ, 1970.
10. А р г и р и с Д ж. Современные достижения в методах расчета конструкций с применением матриц. (Перевод с англ.). М., Стройиздат, 1968, 240 с.
11. Современные методы расчета сложных статически неопределимых систем. Сб. статей. (Перевод с англ. под ред. А.П. Филина) Л., Судпромгиз, 1961.
12. *Pzzemieniecki J., Theory of Matrix Structural Analysis. McGraw Hill, 1968.*
13. *Robinson J. Integrated Theory of Finite Methods McGraw Hill. N-Y. 1972.*
14. Машинное проектирование летательных аппаратов. Итоги науки и техники. Авиационное. Т. 3, М., ВИНТИ, 1976.
15. П е р е с ы п к и н В.П. О применении блочной последовательной верхней релаксации к решению систем линейных уравнений метода конечных элементов в перемещениях. Статья депонирована в ВИНТИ, Куйбышев, 1977, № 2967-77.
16. П е р е с ы п к и н В.П. Использование вырожденной матрицы жесткости в методе перемещений. Труды Куйбышевского авиационного института, вып. 54, 1971.
17. К о м а р о в В.А., П е р е с ы п к и н В.П. Сдвиговой конечный элемент для четырехугольных закрученных панелей обшивки. Во всесоюз. межвуз. сб.: "Прикладные проблемы прочности и пластичности".
18. К о м а р о в В.А., С о л о в о в А.В. Конечный элемент для проектирования рациональных силовых схем конструкций типа крыла. Статья депонирована в ВИНТИ, Куйбышев, 1975, № 768-75 Деп.