2. Сиразутдинов Ю.К. О равнопрочном сечении балок. Труды КАИ. Вып.I68,I974,с.II-I8.

3. Богомолов А.И.,Сиразетдинов Т.К. К решению основных задач управления динамическими объектами.-В кн.: Проблемы аналитической механики, теорий устойчивости и управления. М.:Наука,I975,с.62-66.

4. Ф и л и н А.П.,Г у р е в и ч Я.И. Применения вариационного исчисления к отысканию рациональной формы конструкций.-В сб.: Исследования по строительной механике.ЛИИЖТ, Вып.I90.,I962,с.I6I--I88.

5. Сиразутдинов Ю.К. О применении вариационного исчисления к расчету конструкций наименьшего объема.Труды КАИ, Вып.95.,I968, с I00-II0.

6. Barnett Ralph L., A.M.Asce. Minimum - Weigth Design of Beams for deflection, J. Engng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, 87, N1, 1961.

7. А б р а г я н К.А. К теории балок минимального веса, расчеты на прочностьМ.,I962, вып.8 с.I36-I5I.

8. Сиразутдинов Ю.К. К расчету балок с учетом собственного веса. ИВУЗ " Строительство и архитектура"№II,I967,с.2I-30.

9. Сиразутдинов Ю.К. К расчету конструкций наименьшего объема. Труды КАИ,Вып.I0I,I968,с. I20-I27.

I0. Сиразутдинов Ю.К. Расчет конструкций наименьшего объема методом градиентного спуска. Труды КАИ, Вып.I72,I974,с.33-39.

УДК 629.7.539.3

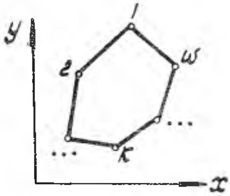
Е.Г. Макеев, В.Г. Матвеев

ТОЧНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В методе конечных элементов при получении матриц элемента (жесткости, нагрузок и т.д.) возникает проблема интегрирования степенных функций координат по области элемента [I] . В работах [2] и [3] приводятся значения интегралов при использовании простейших элементов: треугольника (3 узла) и тетраэдра (4 узла). Целью настоящей статьи является представление интегралов в замкнутой форме для плоских и объемных элементов с произвольным числом узлов.

Рассмотрим в плоскости декартовых координат x, y конечный элемент, представляющий собой некоторую область S (рис.I). Граница Δ элемента состоит из ω прямолинейных отрезков. Обход Δ совершается против часовой стрелки. Обозначим $k = 1, 2, \ldots, \omega$ –номера узлов элемента, x_k, y_k – координаты узлов. Требуется вычислить интеграл вида

$$J_{mn} = \int\limits_S x^m y^n \, ds, \tag{I}$$



Р и с. I. Плоский конечный элемент

где m, n – целые неотрицательные числа.

В формуле Грина

$$\int\limits_S \left[\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right] ds \quad \oint P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \tag{2}$$

положим

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = x^m y^m \tag{3}$$

$$P(x,y) = 0. \tag{4}$$

Условию (3) удовлетворяет, например, функция

$$Q(x,y) = \frac{x^{m+1} y^n}{m+1}. \tag{5}$$

Тогда с учетом (2)-(5) интеграл (I) примет вид

$$J_{mn} = \frac{1}{m+n} \oint\limits_\Delta x^{m+1} y^n \, dy.$$

Если рассматривать Δ как объединение отрезков C_k $(k = 1, 2, \ldots, \omega)$, то получим

$$J_{mn} = \frac{1}{m+n} \sum_{k=1}^{\omega} \int\limits_{C_k} x^{m+1} y^n \, dy. \tag{6}$$

Для линии C_k, заданной в параметрическом виде

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad a \leqslant t \leqslant b,$$

криволинейный интеграл по t [4] :

$$\int\limits_{C_k} \mathcal{F}(x,y)\,dy = \int\limits_a^b \mathcal{F}\left[x(t), y(t)\right] \frac{dy}{dt}\,dt. \qquad (7)$$

Уравнение отрезка прямой C_k запишем следующим образом:

$$x = X_k t + x_k\,;$$
$$y = Y_k t + y_k\,,\quad k = 1, 2, \ldots, \omega,\quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

где

$$\begin{cases} X_k = x_{k+1} - x_k \\ Y_k = y_{k+1} - y_k\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{\omega+1} = x_1 \\ y_{\omega+1} = y_1\,. \end{cases}$$

В этом случае

$$\frac{dy}{dt} = Y_k \qquad и$$

формула (7) дает

$$\int\limits_{C_k} \mathcal{F}(x,y)\,dy = Y_k \int\limits_0^1 \mathcal{F}(X_k t + x_k, Y_k t + y_k)\,dt. \qquad (8)$$

Учитывая (8), интеграл (6) приводим к виду

$$J_{mn} = \frac{1}{m+n} \sum_{k=1}^{\omega} Y_k \int\limits_0^1 (X_k t + x_k)^{m+1} (Y_k t + y_k)^n\,dt.$$

Для дальнейших преобразований используем бином Ньютона

$$J_{mn} = \frac{1}{m+n} \sum_{k+1}^{\omega} Y_k \sum_{i=0}^{m+1} C^i_{m+1} X^i_k x_k^{m+1-i} \sum_{j=0}^{n} C^j_n Y^j_k y_k^{n-j} \int\limits_0^1 t^{i+j}\,dt,$$

где

$$C^q_p = \frac{p!}{q!\,(p-q)!}\,.$$

Окончательно получаем

$$\mathcal{J}_{mn}=\frac{1}{m+n}\sum_{k=1}^{\omega}Y_k\sum_{i=0}^{m+1}C_{m+1}^{i}X_k^{i}x_k^{m+1-i}\sum_{j=0}^{n}\frac{C_n^j Y_k^j y_k^{n-j}}{i+j+1}. \quad (9)$$

Перейдем к вычислению интегралов для объемного элемента.

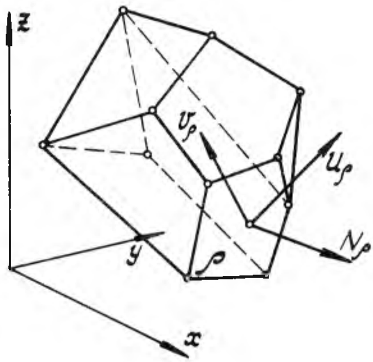
В правой декартовой системе координат xyz рассмотрим конечный элемент в виде ограниченной области V (рис.2). Поверхность σ элемента состоит из $\mathcal{E}$ плоских граней. Введем обозначения: ρ =1,2,..., $\mathcal{E}$ –номера граней, S_ρ – площади граней.

Задача состоит в вычислении интеграла

$$\mathcal{J}_{mnp}=\int_V x^m y^n z^p dV. \quad (10)$$

Здесь m,n,p – целые неотрицательные числа. Воспользуемся формулой Гаусса-Остроградского для частного случая

$$\int_V \frac{\partial \varphi}{\partial z}dV=\oint_\sigma \varphi \cos\gamma\, d\sigma, \quad (11)$$



Р и с.2.Пространственный конечный элемент

где $\varphi(x,y,z)$– непрерывная функция внутри V , γ – угол между внешней нормалью N к поверхности и осью z .

Положим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}=x^m y^n z^p.$$

Этому условию удовлетворяет, например, функция

$$\Phi=\frac{x^m y^n z^{p+1}}{p+1}. \quad (12)$$

Тогда интеграл (10) с учетом (11)и(12) запишется

$$\mathcal{J}_{mnp}=\frac{1}{p+1}\sum_{\rho=1}^{\mathcal{E}}\cos\gamma_\rho\int_{S_\rho}x^m y^n z^{p+1}dS_\rho. \quad (13)$$

Введем на каждой грани местную прямоугольную систему координат $u_\rho v_\rho$, оси которой образуют правую систему с внешней нормалью N_ρ к грани. Тогда уравнение грани ρ как плоскости будет иметь вид

$$\begin{cases} x = d_{x\rho} + a_{x\rho} u_\rho + b_{x\rho} v_\rho \\ y = d_{y\rho} + a_{y\rho} u_\rho + b_{y\rho} v_\rho \\ z = d_{z\rho} + a_{z\rho} u_\rho + b_{z\rho} v_\rho . \end{cases} \tag{I4}$$

Для определения коэффициентов $d_{x\rho}, a_{x\rho}, \dots, b_{z\rho}$ достаточно предварительно вычислить местные и общие координаты любых трех точек грани, не лежащих на одной прямой. С помощью этих коэффициентов можно найти величину $\cos\gamma_\rho$, входящую в (I3)

$$\cos\gamma_\rho = \frac{a_{x\rho} b_{y\rho} - a_{y\rho} b_{x\rho}}{\sqrt{(a_{y\rho} b_{z\rho} - a_{z\rho} b_{y\rho})^2 + (a_{z\rho} b_{x\rho} - a_{x\rho} b_{z\rho})^2 + (a_{x\rho} b_{y\rho} - a_{y\rho} b_{x\rho})^2}} \tag{I5}$$

Осуществим в (I3) замену переменных x, y, z переменными $u_\rho v_\rho$

$$J_{mnp} = \frac{1}{p+1} \sum_{\rho=1}^{\varepsilon} \cos\gamma_\rho \sqrt{E_\rho} \iint_{S_q} (a_{x\rho} u_\rho + b_{x\rho} v_\rho + d_{x\rho})^m \times \tag{I6}$$

$$\times (a_{y\rho} u_\rho + b_{y\rho} v_\rho + d_{y\rho})^n (a_{z\rho} u_\rho + b_{z\rho} v_\rho + d_{z\rho})^{p+1} du_\rho\, dv_\rho .$$

Функция E_ρ определяется формулой [4]

$$E_\rho = \left(\frac{\partial y}{\partial u_\rho}\frac{\partial z}{\partial v_\rho} - \frac{\partial z}{\partial u_\rho}\frac{\partial y}{\partial v_\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_\rho}\frac{\partial x}{\partial v_\rho} - \frac{\partial x}{\partial u_\rho}\frac{\partial z}{\partial v_\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial u_\rho}\frac{\partial y}{\partial v_\rho} - \frac{\partial y}{\partial u_\rho}\frac{\partial x}{\partial v_\rho}\right)^2 .$$

С учетом (I4)

$$E_\rho = (a_{y\rho} b_{z\rho} - a_{z\rho} b_{y\rho})^2 + (a_{z\rho} b_{x\rho} - a_{x\rho} b_{z\rho})^2 + (a_{x\rho} b_{y\rho} - a_{y\rho} b_{x\rho})^2 . \tag{I7}$$

Выполним преобразование выражения $(a+b+c)^m=(a+d)^m$, где $d=b+c$.

Согласно биному Ньютона

$$(a+d)^m=\sum_{i=0}^{m} C_m^i a^{m-i} d^i,$$

$$d^i=\sum_{j=0}^{i} C_i^j b^{i-j} c^j \quad .$$

Следовательно

$$(a+b+c)^m=\sum_{i=0}^{m} C_m^i a^{m-i} \sum_{j=0}^{i} C_i^j b^{i-j} c^j . \qquad (18)$$

С учетом (15),(17) и (18) выражение (16) примет вид

$$\mathcal{J}_{mnp}=\frac{1}{p+1}\sum_{\rho=1}^{\varepsilon}(a_{x\rho} b_{y\rho}-a_{y\rho} b_{x\rho})\sum_{i=0}^{m} C_m^i a_{x\rho}^{m-i}\sum_{j=0}^{i} C_i^j \cdot b_{x\rho}^{i-j} d_{x\rho}^j \times$$

$$\times\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_{y\rho}^{n-k}\sum_{r=0}^{k} C_k^r b_{y\rho}^{k-r} d_{y\rho}^r \sum_{\ell=0}^{p+1} C_{p+1}^{\ell} a_{z\rho}^{p+1-\ell}\sum_{t=0}^{\ell} C_\ell^t b_{z\rho}^{\ell-t} d_{z\rho}^t \times \qquad (19)$$

$$\times\iint_{S_\rho} u_\rho^{m+n+p+1-i-k-\ell} V_\rho^{i+k+\ell-j-r-t} du_\rho dV_\rho .$$

Интегралы вида $\mathcal{J}_{\alpha\beta}=\iint_{S_\rho} u_\rho^\alpha V_\rho^\beta du_\rho dV_\rho$,

где $\alpha=m+n+p+1-i-k-\ell,\ \beta=i+k+\ell-j-r-t$,

находятся по методике вычисления интегралов для плоского элемента. Формулы (9) и (19) позволяют получить точные значения рассматриваемых интегралов и легко программируются на ЭВМ.

Литература

1. О. Зенкевич. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975,с.541.

2. Стриклин. Интегрирование по площади в матричном методе

расчета конструкций. Ракетная техника и космонавтика №IO,I968,ст.252.

3. Бреббиа. Интегрирование по площади и объему в методе дискретных элементов. Ракетная техника и космонавтика №6,I969, ст.252.

4. Г. Корн,Т.Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.:Наука,I977,с.83I.

УДК 629.7.68I.5:5I9.2

М.А. Молдавский

ОБ ОРГАНИЗАЦИИ ПОИСКОВЫХ ПРОЦЕДУР ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОЙ ЦЕЛИ

Многие задачи оптимального проектирования могут быть представлены в виде задач оптимизации с векторным критерием.

$$F(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \to min, \quad x \in D_X \subset E^N, \qquad (I)$$

где $f_i(x)$ – локальные критерии (для определенности полагается, что все локальные критерии желательно минимизировать),

D_X – область допустимых значений вектора оптимизируемых параметров X . Наличие векторного критерия $F(X)$ позволяет строить процедуры поиска оптимального решения не на всем допустимом множестве D_X , а на множестве Парето

$$\pi_X = x^0 \in D_X / \bar{\exists} x \in D_X : f_i(x) \leq f_i(x^0), \ i = \overline{1,m}; \ F(x) \neq F(x^0).$$

Размерность π_X не превышает $m-1$. Обычно в задачах проектирования число локальных критериев m значительно меньше числа оптимизируемых параметров N , соответственно, π_X много меньше D_X .

Заранее множество Парето неизвестно. Для получения паретовских решений используют минимизацию сверток векторного критерия $\varphi(\bar{\lambda}, F(x))$, зависящих от векторного параметра $\bar{\lambda} \in \Lambda$, которые должны удовлетворять условиям [I] .

$$\forall \bar{\lambda} \in \Lambda \ \exists F^0 \in \pi_F : F^0 = \arg \min_{D_F} \varphi(\bar{\lambda}, F),$$

$$\forall F^0 \in \pi_F \ \exists \bar{\lambda} \in \Lambda : F^0 = \arg \min_{D_F} \varphi(\bar{\lambda}, F),$$