На правах рукописи

АЛИМЕНКОВ Иван Васильевич

Аналитическое описание трехмерного оптического поля в нелинейных однородных диспергирующих средах на основе скалярных волновых уравнений с кубической нелинейностью

Специальность 01.04.05 – Оптика

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико – математических наук

Самара 2007

Работа выполнена в Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент И.П. Завершинский

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, доцент А.В.Горохов
кандидат физико-математических наук, доцент С.И.Харитонов

Ведущая организация: Уфимский государственный авиационный технический университет

Защита состоится 30 мая 2007 года в 13 часов на заседании диссертационного совета Д 212.215.01 при государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева» по адресу: 443086, г. Самара, Московское шоссе, 34

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева».

Автореферат разослан 25 апреля 2007 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.т.н., профессор В.Г. Шахов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Практически всякие колебания и волны модулированы – амплитуда, фаза, частота и даже форма огибающей могут медленно меняться. Модуляция может быть связана с воздействием внешних сил или полей, а может возникать в результате развития разного рода неустойчивостей. Поскольку только модулированные волны могут переносить информацию, теория распространения таких волн имеет важное прикладное значение. Основным уравнением теории модулированных волн является так называемое нелинейное уравнение Шредингера (НУШ). НУШ описывает распространение нелинейных ленгмюровских волн, волн на глубокой воде; волны в линиях передачи, акустические волны в жидкостях с пузырьками и, прежде всего, распространение оптического излучения в нелинейных средах. Последний класс приложений стал особенно актуальным с развитием лазерных технологий, поскольку интенсивность лазерного излучения обычно настолько велика, что возникает необходимость учитывать нелинейную часть восприимчивости среды. Кроме того, в последнее время возрос интерес к исследованию распространения электромагнитных волн в пространственно-неоднородных средах с высокой эффективностью нелинейных преобразований (гигантские нелинейности), таких как допированные оптические волокна и нематические жидкие кристаллы с добавлением примесей.

Более общей моделью, чем НУШ, описывающей распространение электромагнитных волн в нелинейных средах, является нелинейное волновое уравнение. Нелинейные явления и эффекты, связанные с модуляцией волн, очень разнообразны. Это – самофокусировка волновых пучков, самосжатие волновых пакетов, обращение волнового фронта и другие. К настоящему времени подробно разработана двумерная теория таких уравнений. Она основана на методе обратной задачи теории рассеяния (МОЗР). Однако трехмерные НУШ и нелинейное волновое уравнение не обладают свойством Пенлеве и не могут быть решены с использованием МОЗР, в то время как большинство реальных систем требуют описания в трех пространственных измерениях. Но, на сегодняшний день не существует ни одного систематического метода нахождения трехмерных решений.

Единичные точные трехмерные решения некоторых сложных систем получены лишь благодаря изощренным приемам, приводящим к упрощению полевых уравнений, только для данных систем. Для подавляющего большинства реальных моделей приходится изучать общие свойства решений, не решая полевых уравнений.

В силу сказанного, актуальной является задача описания эволюции электромагнитного поля большой интенсивности в нелинейных средах в трехмерном пространстве.

Цель работы. Определение трехмерной структуры линейно поляризованного оптического поля в диспергирующих средах с кубической нелинейностью.

Задачи исследования. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Провести аналитическое описание стационарного и нестационарного оптического поля в трех пространственных переменных на основе НУШ и нелинейного волнового уравнения с кубической нелинейностью.
2. Получить точные аналитические решения НУШ для линейно поляризованного оптического поля в однородном изотропном диэлектрике для стационарного и нестационарного случаев
3. Получить точные аналитические решения нелинейного волнового уравнения, описывающего распространение линейно поляризованного оптического излучения в однородном изотропном диэлектрике.
4. Для решения поставленных задач свести задачу о решении НУШ и нелинейного волнового уравнения к решению двух уравнений, одно из которых будет линейным однородным уравнением в частных производных первого порядка и найти его полные или особые интегралы. Свести оставшееся нелинейное уравнение в частных производных второго порядка к *обыкновенному* нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка.

Достоверность полученных результатов базируется на обоснованности принятых в оптике физических и математических моделей и подтверждается сравнением с опубликованными теоретическими результатами, которые могут быть получены предельным переходом из результатов, полученных автором.

Научная новизна работы.

В работе получены и проанализированы точные и асимптотические трехмерные решения НУШ, описывающие стационарное оптическое поле, а также точные и асимптотические решения типа бегущей линейно поляризованной волны, описывающие нестационарное оптическое поле для положительного и отрицательного коэффициентов нелинейности.

Получены и проанализированы точные трехмерные решения нелинейного волнового уравнения, описывающие стационарное оптическое поле, а также точные решения типа бегущей волны, описывающие нестационарное оптическое поле для положительного и отрицательного коэффициентов нелинейности.

Предложен метод решения НУШ и нелинейного волнового уравнения с помощью полных и особых интегралов линейных однородных уравнений в частных производных первого порядка.

Практическая значимость. Полученные результаты могут быть использованы при интерпретации результатов экспериментальных и численных исследований распространения оптического излучения большой амплитуды в нелинейных средах и устройствах, где эти среды являются рабочими телами. Разработанная техника решения может применяться для других уравнений в различных областях физики и других областей знания.

На защиту выносятся:

1. Полученные точные и асимптотические решения нелинейного уравнения Шредингера для трехмерного линейно поляризованного оптического поля в идеальном немагнитном и однородном диэлектрике.

2. Полученные точные решения трехмерного нелинейного волнового уравнения для линейно поляризованного излучения в идеальном немагнитном и однородном диэлектрике с кубической нелинейностью.

3. Метод получения трехмерных точных аналитических решений НУШ и нелинейного волнового уравнения с помощью полных и особых интегралов линейных однородных уравнений в частных производных первого порядка.

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на региональной научной конференции «Проблемы фундаментальной физики XXI века» (Самара, 2005г.), научных семинарах кафедры прикладной математики Самарского государственного аэрокосмического университета (СГАУ), а также совместном семинаре кафедры прикладной математики СГАУ и Института систем обработки изображений РАН.

Публикации. По результатам исследований опубликованы 5 печатных работ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка источников литературы, включающего 164 наименования. Общий объем диссертации – 97 страниц текста (в том числе 12 рисунков).

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цель и задачи работы, указаны научная новизна, практическая значимость, приведены основные положения, выносимые на защиту, описаны структура и содержание работы.

Глава 1 содержит краткое описание существующих результатов в теории уединенных волн и её приложений. Как известно, методом медленно меняющихся в пространстве и времени амплитуд для слабо нелинейных диэлектриков может быть получено нелинейное уравнение Шредингера для монохроматического линейно поляризованного света

$$ik_0\left(\frac{\partial E_0}{\partial x}+\frac{1}{u}\frac{\partial E_0}{\partial t}\right)+\frac{1}{2}\nabla^2_{y,z}E_0+\eta\left|E_0\right|^2 E_0=0 \qquad (1)$$

и его стационарный вариант

$$i2k_0\frac{\partial E_0}{\partial x}+\nabla^2_{y,z}E_0+2\eta\left|E_0\right|^2 E_0=0, \qquad (2)$$

где $E_0(\boldsymbol{r},t)$– медленно меняющаяся функция координат и времени, k_0 – модуль волнового вектора $\boldsymbol{k}_0$, направленного вдоль оси x, ω – циклическая частота несущей волны, $\eta(\omega)$ – коэффициент нелинейности среды, u – групповая скорость

$1/u = dk_0 / d\omega$, причем принято $k_0^2 = (\omega / c)^2 \varepsilon(\omega)$ согласно линейной теории, где $\varepsilon(\omega)$ – линейная проницаемость среды, т.е. поле E линейно поляризованной вдоль оси z волны представлено в виде $E = E_0 e^{i(k_0 x - \omega t)}$.

Приведен обзор механизмов возникновения нелинейной зависимости показателя преломления от напряженности электрического поля.

Приведено известное двумерное решение стационарного НУШ (2):

$$E_0 = \frac{a}{\sqrt{\eta}} \exp\left\{ i\left[\frac{1}{2} by - (\frac{1}{4} b^2 - a^2) \frac{x}{2k_0} \right] \right\} ch^{-1}\, a\left(y - \frac{bx}{2k_0} \right), \qquad (3)$$

где a и b – свободные параметры.

<u>Во второй главе</u> найдены точные трехмерные решения исходной математической модели с помощью полных интегралов линейных однородных уравнений первого порядка. Разработана схема решения стационарного уравнения (2). Функция $E_0(\boldsymbol{r})$ ищется в виде

$$E_0 = f(\boldsymbol{r}) e^{i\boldsymbol{qr}}, \qquad (4)$$

где $f(\boldsymbol{r})$ – вещественная функция, $\boldsymbol{q} = (q_x, q_y, q_z)$ – малая поправка к волновому вектору $\boldsymbol{k}_0$. В результате уравнение (2), после отделения мнимой и вещественной частей, сводится к двум уравнениям

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{q_y}{k_0}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{q_z}{k_0}\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \qquad (5)$$

$$\nabla^2_{y,z} f = (2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2) f - 2\eta f^3. \qquad (6)$$

Уравнение (5) является линейным однородным уравнением первого порядка, теория которых детально разработана. Как известно из теории таких уравнений, решением уравнения (5) является любая дифференцируемая функция $f = f\big(s(\boldsymbol{r})\big)$, где $s(\boldsymbol{r})$ – полный интеграл уравнения

$$\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{q_y}{k_0}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{q_z}{k_0}\frac{\partial s}{\partial z} = 0, \qquad (7)$$

имеющий вид

$$s(\boldsymbol{r}) = \frac{b_y\left[k_0(y - y_0) - q_y(x - x_0)\right] + b_z\left[k_0(z - z_0) - q_z(x - x_0)\right]}{k_0\sqrt{b_y^2 + b_z^2}}, \qquad (8)$$

где b_y, b_z, x_0, y_0, z_0 – произвольные постоянные.

Показано, что использование подстановки $f = f(s(\boldsymbol{r}))$ в (6) приводит задачу к обыкновенному автономному уравнению второго порядка

$$f''(s) = \left(2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2\right) f(s) - 2\eta f^3(s), \qquad (9)$$

несингулярные решения которого имеют вид

$$f = \pm \frac{\sqrt{(2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2)/\eta}}{ch\left\{\sqrt{2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2}\ s\right\}}.$$

Окончательно, решение (4) примет вид

$$E_0 = \frac{\pm\sqrt{(2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2)/\eta}\ \exp\{i\boldsymbol{qr}\}}{ch\left\{\dfrac{b_y\left[k_0(y-y_0) - q_y(x-x_0)\right] + b_z\left[k_0(z-z_0) - q_z(x-x_0)\right]}{k_0}\sqrt{\dfrac{2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2}{b_y^2 + b_z^2}}\right\}}. \qquad (10)$$

Решение (10) содержит в себе известное двумерное решение (3), найденное впервые В.Е. Захаровым и А.Б. Шабатом. Полагая в (10) $b_z = 0$, $x_0 = y_0 = 0$, $q_z = 0$, имеем

$$E_0 = \frac{\sqrt{2k_0 q_x + q_y^2}\ \exp\{i(q_x x + q_y y)\}}{\sqrt{\eta}\, ch\left[\sqrt{2k_0 q_x + q_y^2}\left(y - \dfrac{q_y x}{k_0}\right)\right]}.$$

Введем обозначение $a = \sqrt{2k_0 q_x + q_y^2}$, откуда $q_x = (a^2 - q_y^2)/2k_0$. Тогда

$$E_0 = \frac{a}{\sqrt{\eta}} \exp\left\{i\left[(a^2 - q_y^2)\frac{x}{2k_0} + q_y y\right]\right\} / ch\, a\left(y - \frac{q_y x}{k_0}\right). \qquad (11)$$

Полагая в (11) $q_y = b/2$, получим (3).

Если в уравнении (2) отделить переменную x, по аналогии с отделением времени в квантовомеханическом уравнении Шредингера, т.е. положить $E_0(x, y, z) = \widetilde{E}_0(y, z) e^{i\gamma x}$, то реализация приведенной выше схемы приводит к решению

$$E_0 = \frac{\pm\sqrt{(2k_0\gamma + q_y^2 + q_z^2)/\eta}\ \exp\{i(\gamma x + q_y y + q_z z)\}}{ch\left\{\left[q_y(z - z_0) - q_z(y - y_0)\right]\sqrt{(2k_0\gamma + q_y^2 + q_z^2)/\left(q_y^2 + q_z^2\right)}\right\}},$$

не содержащемуся в решении (10) и не включающему в себя известное решение (3).

Для нестационарного уравнения (1) в случае $\eta > 0$, точные трехмерные решения имеют вид:

$$E_0(\boldsymbol{r},t) = \frac{\pm\sqrt{\left(2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2\right)/\eta}\,\exp\{i\boldsymbol{qr}\}}{ch\left[\sqrt{\dfrac{2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2}{b_y^2 + b_z^2}}\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{v}t)\right]}\ , \qquad (12)$$

где $\boldsymbol{v}$ – вектор скорости с проекциями: $\boldsymbol{v} = (u;\, uq_y / k_0;\; uq_z / k_0)$. Решение (12) является бегущей волной вдоль направления $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}t$. Для случая $\eta < 0$

$$E_0 = \pm\sqrt{\frac{-2k_0 q_x - q_y^2 - q_z^2}{2|\eta|}}\,th\left\{\sqrt{\frac{-2k_0 q_x - q_y^2 - q_z^2}{2(b_y^2 + b_z^2)}}\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0} - \boldsymbol{v}t)\right\}\exp\{i\boldsymbol{qr}\}\ ,$$

причем $q_x < -\left(q_y^2 + q_z^2\right)/2k_0$.

Показано, что если вместо полных интегралов линейных однородных уравнений первого порядка использовать особые интегралы, то задача сведется к интегрированию нелинейного неавтономного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, для которого найдены асимптотические и численные решения. Разработана схема применения особых интегралов для уравнения (2), которое, после подстановки в него функции $E_0(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r})e^{i\boldsymbol{qr}}$, свелось к уравнениям (5) и (6).

В качестве решения линейного однородного уравнения первого порядка (5) использовалась любая дифференцируемая функция $f = f\big(s(\boldsymbol{r})\big)$, где $s(\boldsymbol{r})$ – полный интеграл уравнения (7), имеющий вид (8). Теперь вместо полного интеграла (8) используется особый интеграл уравнения (7). Для этого из (8) исключают произвольные постоянные b_y и b_z. После вычисления производных $\partial s / \partial b_y$ и $\partial s / \partial b_z$ и, приравнивания их к нулю, из (8) следует особый интеграл уравнения (7)

$$s_0(\boldsymbol{r}) = \sqrt{\left(y - y_0 - \frac{q_y}{k_0}(x - x_0)\right)^2 + \left(z - z_0 - \frac{q_z}{k_0}(x - x_0)\right)^2}\ , \qquad (13)$$

являющийся неотрицательной нелинейной функцией пространственных переменных. Легко убедиться, что соотношение (13) является решением уравнения (7). Далее следует подставить функцию $f = f\left(s_0(\boldsymbol{r})\right)$ в уравнение (6). В результате задача опять сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$f''(s_0) + s_0^{-1} f'(s_0) = \left(2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2\right) f(s_0) - 2\eta f^3(s_0), \qquad (14)$$

которое, в отличие от (9), *неавтономно* и его точные решения не известны. Можно найти асимптотические решения уравнения (14) при больших значениях s_0, выраженных в единицах длин волн (мкм). В этом случае, пренебрегая вторым слагаемым в левой части уравнения (14), получим автономное уравнение

$$f''(s_0) = \left(2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2\right) f(s_0) - 2\eta f^3(s_0),$$

совпадающее с (9) и имеющее решения:

$$f = \pm \frac{\sqrt{(2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2)/\eta}}{ch\left\{\sqrt{2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2}\; s_0\right\}}.$$

Следовательно, (4) принимает вид

$$E_0 = \frac{\pm e^{iqr} \sqrt{(2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2)/\eta}}{ch\sqrt{(2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2)\left((y - y_0 - q_y(x - x_0)/k_0)^2 + (z - z_0 - q_z(x - x_0)/k_0)^2\right)}}.$$

Естественный интерес представляет нахождение численного решения уравнения (14). С помощью преобразования

$$\xi = \sqrt{2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2}\; s_0, \qquad f = \sqrt{(2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2)/\eta}\, u$$

приводим (14) к безразмерному виду

$$u''(\xi) + \frac{u'(\xi)}{\xi} = u(\xi) - 2u^3(\xi). \qquad (15)$$

На рис. 1 а), б) представлены численные решения уравнения (15) и их производные. Выходящие из начала координат кривые – графики производных $u'(\xi)$ соответствующих решений $u(\xi)$. Из приведенных графиков следует, что решения уравнения (15) являются гладкими ограниченными функциями, асимптотически стремящимися к нулю, а также, что уравнение (15) обладает симметрией относительно преобразования $u \leftrightarrow -u$.

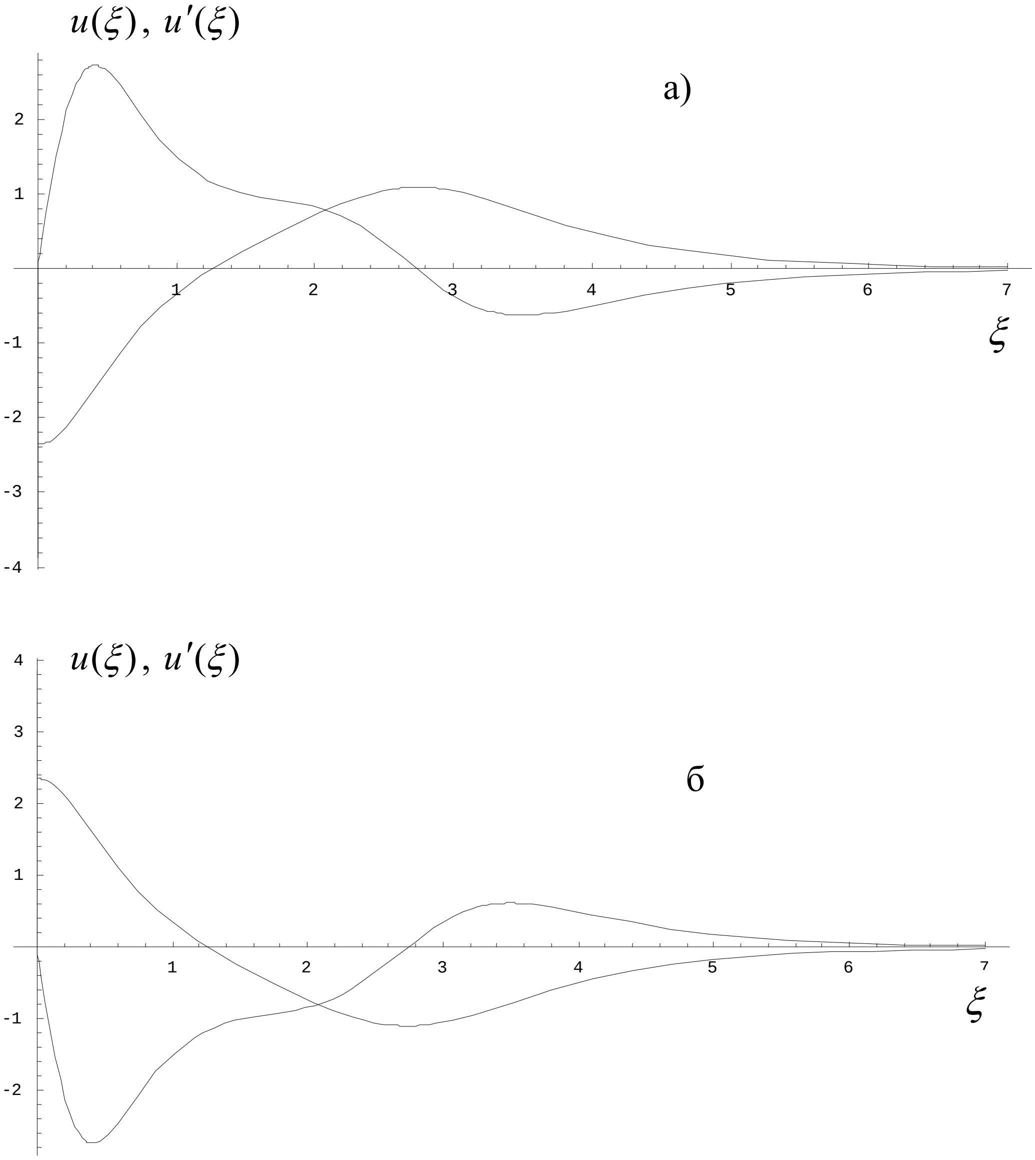

Рис. 1 Численные решения уравнения (15) и их производные.

<u>В третьей главе</u> рассматривается уточненная математическая модель с полным оператором Лапласа. Как известно, при выводе уравнений (1) и (2) предполагалось, что второй производной по x в операторе Лапласа можно пренебречь по сравнению со вторыми производными по y и z. В этой главе ищутся решения уравнений

$$ik_0\left(\frac{\partial E_0}{\partial x} + \frac{1}{u}\frac{\partial E_0}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\nabla^2 E_0 + \eta\left|E_0\right|^2 E_0 = 0,$$

$$i2k_0\frac{\partial E_0}{\partial x} + \nabla^2 E_0 + 2\eta\left|E_0\right|^2 E_0 = 0.$$

Реализуя предложенную схему решения таких уравнений, найдены стационарные решения вида $E_0 = f(\boldsymbol{r})e^{iqr}$:

$$E_0 = \pm \frac{\sqrt{2k_0 q_x + q^2}\, e^{iqr}}{\sqrt{\eta}\, ch\left\{\sqrt{2k_0 q_x + q^2}\, s(\boldsymbol{r})\right\}},$$

$$E_0 = \pm e^{iqr}\sqrt{\frac{-2k_0 q_x - q^2}{2|\eta|}}\, th\left\{\sqrt{\frac{-2k_0 q_x - q^2}{2}}\, s(\boldsymbol{r})\right\}$$

для $\eta > 0$ и $\eta < 0$ соответственно, где

$$s(\boldsymbol{r}) = \frac{b_y\left[(k_0 + q_x)(y - y_0) - q_y(x - x_0)\right] + b_z\left[(k_0 + q_x)(z - z_0) - q_z(x - x_0)\right]}{\sqrt{(b_y q_y + b_z q_z)^2 + (b_y^2 + b_z^2)(k_0 + q_x)^2}},$$

и нестационарные решения вида $E_0 = f(\boldsymbol{r}, t)e^{iqr}$:

$$E_0 = \pm \frac{\sqrt{(2k_0 q_x + q^2)/\eta}\, e^{iqr}}{ch\left\{\sqrt{2k_0 q_x + q^2}\, \boldsymbol{b}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{v}t)/b\right\}},$$

где

$$\boldsymbol{v} = \left(u\frac{k_0 + q_x}{k_0};\quad \frac{uq_y}{k_0};\quad \frac{uq_z}{k_0}\right),$$

в случае $\eta > 0$ и

$$E_0(\boldsymbol{r}, t) = \pm e^{iqr}\sqrt{\frac{-2k_0 q_x - q^2}{2|\eta|}}\, th\left\{\sqrt{\frac{-2k_0 q_x - q^2}{2}}\, \boldsymbol{b}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{v}t)/b\right\}$$

в случае $\eta < 0$.

Реализация схемы использования особых интегралов линейных однородных уравнений первого порядка к нестационарному НУШ с полным оператором Лапласа приводит к асимптотическим решениям

$$E_0(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\pm e^{iqr}\sqrt{(2k_0 q_x + q^2)/\eta}}{ch\left\{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{v}t|\sqrt{(2k_0 q_x + q^2)}\right\}},$$

$$E_0 = \pm e^{iqr}\sqrt{\frac{-2k_0 q_x - q^2}{2|\eta|}}\, th\left\{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{v}t|\sqrt{\frac{-2k_0 q_x - q^2}{2}}\right\}$$

для $\eta > 0$ и $\eta < 0$ соответственно.

В четвертой главе найдены трехмерные решения нелинейного волнового уравнения. Как известно, НУШ выводится из уравнения $rot\,rot\,\boldsymbol{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{D}}{\partial t^2} = 0$, следующего из уравнений Максвелла после исключения из них магнитного поля, в котором вторая производная по времени заменяется приближенным выражением, содержащим первую производную. Если отказаться от этого приближения, то из уравнений Максвелла с использованием метода медленно меняющихся в пространстве и времени амплитуд для слабо нелинейных диэлектриков следует нелинейное волновое уравнение

$$\frac{\alpha}{c^2}\frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} - \nabla^2 E_0 + \left(k_0^2 - \frac{\alpha\omega^2}{c^2}\right)E_0 - 2\eta|E_0|^2 E_0 - i2\left(\frac{\alpha\omega}{c^2}\frac{\partial E_0}{\partial t} + k_0\frac{\partial E_0}{\partial x}\right) = 0,$$

где $\alpha > 1$ – безразмерная постоянная, c – скорость света в вакууме. Его точные решения имеют вид:

$$E_0(\boldsymbol{r}, t) = \pm \frac{\sqrt{(k^2 - \alpha\omega^2/c^2)/\eta}\,\exp\{i\boldsymbol{qr}\}}{ch\left\{\sqrt{\dfrac{c^2k^2 - \alpha\omega^2}{b^2c^2 - \alpha(\boldsymbol{bu})^2}}\,\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0} - \boldsymbol{u}t)\right\}},$$

где $\boldsymbol{u}$ – вектор скорости

$$\boldsymbol{u} = \left(\frac{c^2(k_0 + q_x)}{\alpha\omega},\quad \frac{c^2 q_y}{\alpha\omega},\quad \frac{c^2 q_z}{\alpha\omega}\right),$$

$\boldsymbol{k} = (k_0 + q_x,\quad q_y,\quad q_z)$ – волновой вектор.

Для стационарного уравнения

$$2ik_0\frac{\partial E_0}{\partial x} + \nabla^2 E_0 - \left(k_0^2 - \frac{\alpha\omega^2}{c^2}\right)E_0 + 2\eta|E_0|^2 E_0 = 0$$

получены решения:

$$E_0(\boldsymbol{r}) = \pm\frac{e^{i\boldsymbol{qr}}\sqrt{(k^2 - \alpha\omega^2/c^2)/\eta}}{ch\left\{\sqrt{k^2 - \alpha\omega^2/c^2}\,s(\boldsymbol{r})\right\}},$$

где

$$s(\boldsymbol{r}) = \frac{b_y\left[(k_0 + q_x)(y - y_0) - q_y(x - x_0)\right] + b_z\left[(k_0 + q_x)(z - z_0) - q_z(x - x_0)\right]}{\sqrt{(b_y q_y + b_z q_z)^2 + (b_y^2 + b_z^2)(k_0 + q_x)^2}}.$$

В заключении перечислены полученные в работе результаты и сформулированы основные выводы.

Таким образом, в работе получены следующие **основные результаты**:

1. Аналитически получены трехмерные стационарные и нестационарные нелокализованные решения НУШ и нелинейного волнового уравнений с кубической нелинейностью в оптически однородных изотропных средах.

2. Численно и аналитически получены трехмерные стационарные и нестационарные локализованные решения НУШ в виде линейно поляризованных амплитудно модулированных оптических импульсов.

3. Получено нелинейное волновое уравнение с кубическим типом нелинейности, описывающее распространение оптического излучения в нелинейном однородном изотропном диэлектрике, и найдены его точные аналитические решения для стационарного и нестационарного случаев.

4. Показано, что использование особого интеграла линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка приводит к неавтономному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка, для которого найдены асимптотические и численные решения.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность профессору А.И. Жданову за полезные обсуждения.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Алименков И.В. Точные решения некоторых уравнений нелинейной оптики // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2005. – т.8. – № 1. – с. 69-76.
2. Алименков И.В. Точно решаемые математические модели в нелинейной оптике // Компьютерная оптика. – 2005. – № 28 – с. 45-54.
3. Алименков И.В. Комплексное уравнение Гинзбурга – Ландау и его решения в виде уединенных волн // Тезисы докладов региональной научной конференции «Проблемы фундаментальной физики XXI века». – Самара: «Универс-групп», 2005. – с. 81.

4. Алименков И.В. Нелинейное уравнение Шредингера в трёх пространственных измерениях // Компьютерная оптика. – 2005. – № 28 – с. 55-59.
5. Алименков И.В. Точные решения нелинейного уравнения Шредингера и комплексного уравнения Гинзбурга – Ландау на $\mathbb{R}^{3+1}$ // Вестник СамГУ – Естественнонаучная серия. – 2006. – № 3 (43) – с. 5-14.