

**ФУДОБИНА ЕКАТЕРИНА АНАТОЛЬЕВНА**

**ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СОГЛАСОВАННОГО ВЫБОРА ПАРАМЕТРОВ  
ЛИЗИНГОВОГО КОНТРАКТА**

Специальность 08.00.13. – Математические и инструментальные методы экономики

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата экономических наук

Работа выполнена на кафедре финансов и кредита Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет)»

Научный руководитель – кандидат технических наук, доцент  
Павлов Олег Валерьевич

Официальные оппоненты – доктор экономических наук, профессор  
Афоничкин Александр Иванович

– кандидат экономических наук  
Яркова Ольга Николаевна

Ведущая организация Автономное муниципальное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Самарская академия государственного и муниципального управления», г. Самара

Защита состоится 24 декабря 2010 г. на заседании диссертационного совета ДМ212.215.01 при ГОУ ВПО «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет)» по адресу: 443086 г. Самара, Московское шоссе, 34.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГОУ ВПО «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет)».

Автореферат разослан 23 ноября 2010 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета ДМ 212.215.01  
доктор экономических наук, доцент

М.Г. Сорокина

## 1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы исследования.** Промышленные предприятия с целью обеспечения конкурентоспособности стремятся к повышению качества продукции и снижению издержек. Это невозможно без современных средств производства, поэтому фирмам требуется своевременно менять морально и физически устаревшее оборудование на новое. В настоящее время многие российских предприятий нуждаются в модернизации.

Для отечественных предприятий лизинг стал наиболее подходящим способом финансирования инвестиций. Главное преимущество лизинга состоит в том, что предоставляются не денежные средства, а необходимое оборудование, которое сразу можно использовать в производственном процессе.

Важным этапом в организации лизинговой сделки является заключение лизингового контракта между лизингодателем и лизингополучателем. Условия (параметры) контракта определяют сумму лизинговых платежей, которая отражает экономические интересы лизингодателя и лизингополучателя. Исходя из экономических интересов, у участников сделки существуют различные предпочтения по выбору управляющих параметров лизингового контракта. Однако, несмотря на различные экономические интересы, лизингополучатель и лизингодатель заинтересованы в сотрудничестве. Чтобы сделка состоялась, выбор параметров лизингового контракта должен проводиться с учетом экономических интересов, как лизингодателя, так и лизингополучателя.

Таким образом, актуальной задачей является разработка математических моделей, обеспечивающих экономически выгодное взаимодействие лизингодателя и лизингополучателя.

**Состояние изученности проблемы.** Рассмотрение проблем, связанных с лизингом, отражено в работах В.Д. Газмана, В.А. Горемыкина, В.М. Джуха, М.В. Карпа, А.Н. Киркорова, Л.Н. Прилуцкого, Е.Н. Чекмаревой и других. В работах этих авторов разработаны методики расчета лизинговых платежей, оценки эффективности лизинговых сделок, управление финансами лизинговых компаний.

Однако в указанных работах, решение проблем рассматривается из экономических интересов только одного из участников лизинговой сделки: лизингодателя или лизингополучателя. Методической основой для решения задач согласования интересов участников экономических систем являются теория активных систем и теория иерархических игр, основные положения которых изложены в работах В.Н. Буркова, В.В. Кондратьева, А.В. Щепкина, А.К. Еналеева, Д.А. Новикова, Н.Н. Моисеева, Ю.Б. Гермейера, А.Ф. Кононенко, М.А. Горелова, Ф.И. Ерешко. Результаты практического применения этих теорий опубликованы в трудах А.А. Ашимова, В.П. Авдеева, Т.В. Киселевой, И.А. Горгидзе, С.А. Баркалова, В.Г. Засканова, Г.М. Гришанова, М.Г. Сорокиной.

Вместе с тем, до настоящего времени не получила должного решения такая проблема, как согласованный выбор параметров лизинговых контрактов, учитывающий экономические интересы лизингодателя и лизингополучателя.

Отсутствие универсальных математических моделей в этой области делает актуальным задачи, решение которых приведет к разработке методов согласованного выбора параметров лизинговых контрактов.

**Цель и задачи исследования.** Целью настоящей работы является разработка математических моделей и алгоритма согласованного выбора параметров лизингового контракта, обеспечивающих экономически выгодное взаимодействие участников лизинговой сделки.

В соответствии с поставленной целью исследования в работе решаются следующие задачи:

1. Анализ экономических отношений между участниками лизинговой сделки.
2. Анализ параметров лизингового контракта, влияющих на экономические интересы лизингодателя и лизингополучателя.

3.Формулировка динамических моделей принятия решений лизингодателем и лизингополучателем для определения оптимальных параметров лизингового контракта.

4.Решение задач оптимального управления лизинговыми платежами для лизингополучателя и лизингодателя.

5.Разработка алгоритма согласованного выбора параметров лизингового контракта.

6.Решение задач оптимального управления аннуитетными лизинговыми платежами для лизингополучателя и лизингодателя в аналитическом виде.

7.Практическая реализация предложенного алгоритма согласованного выбора параметров лизингового контракта в компании ЗАО «ЛиКо».

**Область исследования** соответствует пункту 1.4. «Разработка и исследование моделей и математических методов анализа микроэкономических процессов и систем: отраслей народного хозяйства, фирм и предприятий, домашних хозяйств, рынков, механизмов формирования спроса и потребления, способов количественной оценки предпринимательских рисков и обоснования инвестиционных решений» по паспорту специальности 08.00.13 - Математические и инструментальные методы экономики.

**Объектом исследования** являются лизинговые контракты в коммерческих банках и финансовых организациях, а также процессы экономических взаимодействий участников лизинговой сделки.

**Предметом исследования** являются математические модели принятия решений лизингодателем и лизингополучателем.

**Методы исследования.** Исследования базируются на применении методов теории активных систем, теории иерархических игр, финансовой математики, теории оптимального управления непрерывными и дискретными системами.

**Научная новизна диссертации.** Новые научные результаты, полученные автором в процессе исследования, состоят в следующем:

1.Разработаны динамические модели принятия решений лизингодателем и лизингополучателем, отражающие их экономические интересы.

2.Найдены оптимальные стратегии выплаты лизинговых платежей для лизингополучателя и лизингодателя, обеспечивающие соответственно максимизацию и минимизацию их целевых функций.

3.Разработан алгоритм согласованного выбора параметров лизингового контракта, позволяющий количественно определить границы области компромисса между лизингодателем и лизингополучателем.

4.Получены аналитические формулы, определяющие границы области компромисса между лизингодателем и лизингополучателем в случае аннуитетных платежей.

**Практическая значимость диссертационного исследования** заключается в том, что предлагаемые автором динамические модели, формулы и алгоритм позволяют количественно определить границы области компромисса между лизингодателем и лизингополучателем, необходимые для успешного ведения переговоров. Разработанные автором алгоритм и аналитические формулы используются в практической деятельности лизинговой компании ЗАО «ЛиКо».

**Апробация основных положений работы.** Основные теоретические и практические положения работы докладывались и обсуждались на всероссийских и международных научно-практических конференциях и семинарах:

- «Наука, бизнес, образование'2007» (Самара, 2007 г.)
- «Высшее образование, бизнес, предпринимательство» (Самара, 2009 г.)

Основные положения и результаты исследования опубликованы в 10 работах, в том числе в ведущих рецензируемых изданиях, определённых Высшей аттестационной комиссией – 3 статьи.

**Структура диссертации.** Диссертация общим объемом 128 страниц состоит из введения, трех глав, заключения, библиографического списка из 80 наименований. Работа содержит 13 таблиц, 57 рисунков.

## II. ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

*Во введении* автором обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулированы объект и предмет исследования, показана научная новизна и практическая значимость полученных результатов.

*В первой главе* представлен анализ российского рынка лизинговых услуг по годам, по регионам России, по видам имущества. На рисунке 1 приведена динамика изменения объемов лизинговых сделок с 1998 по 2009 год. С 1999 по 2007 годы происходил быстрый рост рынка, который затем сменился его уменьшением в 2008-2009 годах из-за мирового финансового кризиса. Популярность лизинга в России выражается большими объемами лизинговых сделок, распространением лизинга во все регионы России.

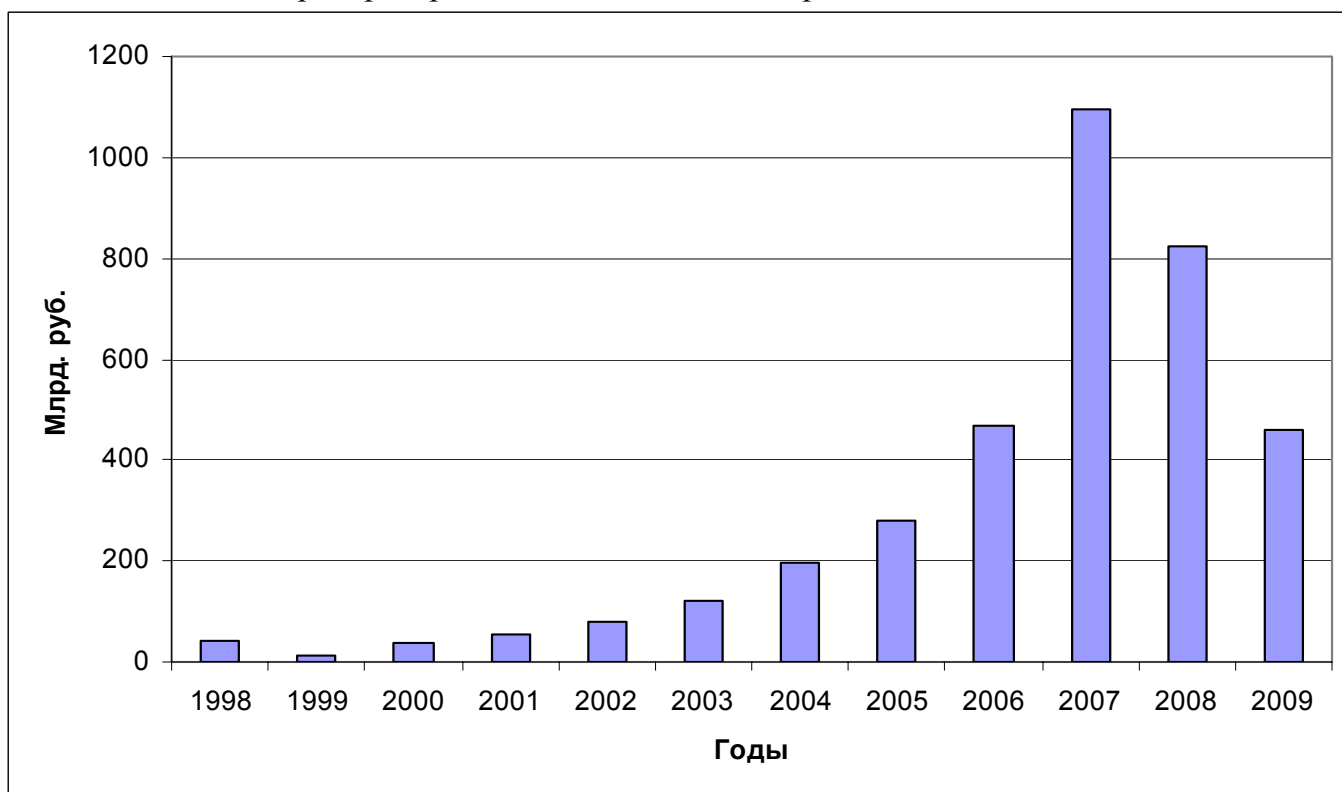


Рисунок 1- Динамика объемов лизинговых сделок в России

Для регулирования лизинговой деятельности в РФ создана нормативно-правовая база. Основу лизингового законодательства составляют:

- Федеральный закон от 29.10.1998 г. №164-ФЗ «О финансовой аренде (лизинге)»;
- Гражданский кодекс РФ (статьи 665-670);
- Федеральный закон от 08.02.1998 г. №16-ФЗ «О присоединении РФ к Конвенции УНИДРУА о международном финансовом лизинге»;
- региональные законы.

Схема организации многосторонней лизинговой сделки представлена на рисунке 2. Основными участниками лизинговой сделки являются лизингодатель и лизингополучатель, между которыми заключается лизинговый контракт (договор лизинга). Анализ российского лизингового законодательства показал, что с правовой точки зрения регламентируется лишь наличие определенных параметров в договоре. Но величины этих параметров никак не определяются законодательно, а являются предметом переговоров между лизингодателем и лизингополучателем. Согласованные параметры, устраивающие участников лизинговой сделки, фиксируются в контракте.

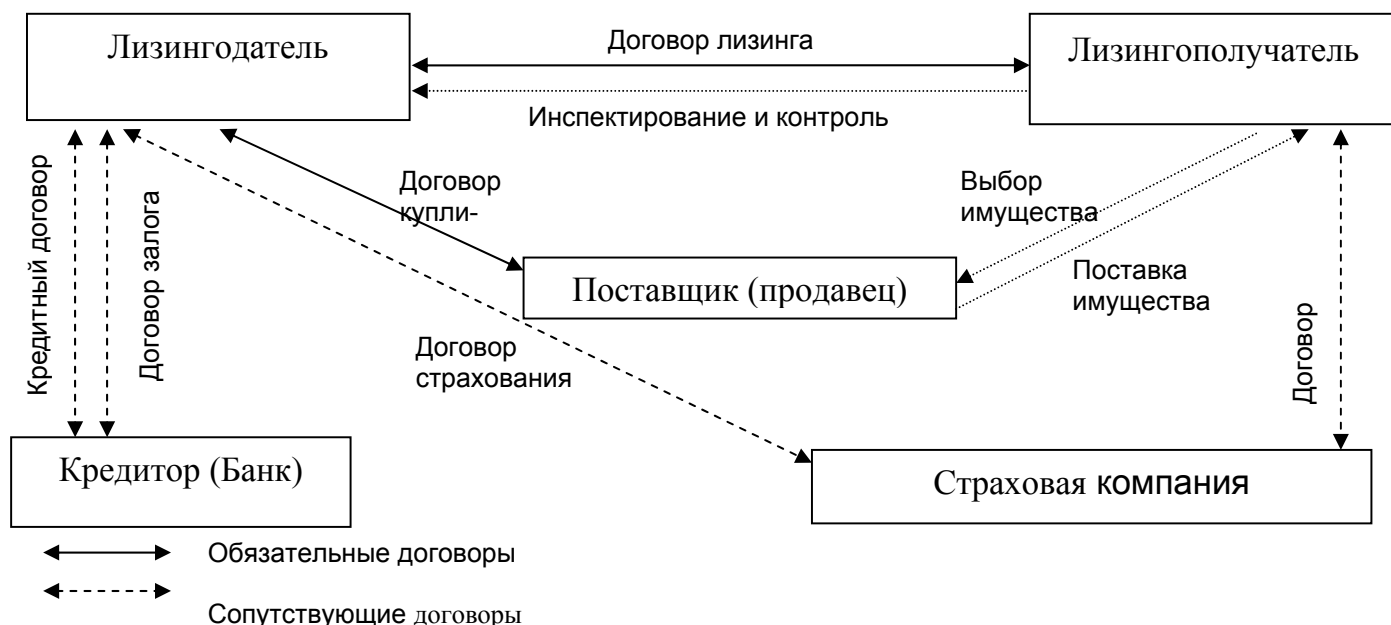


Рисунок 2 – Организация многосторонней лизинговой сделки

Анализ сделок на рынке лизинговых услуг показал, что в контракте обязательно указываются следующие параметры:

1. Стоимость лизингового имущества  $K$ , руб.;
2. Годовая ставка комиссионного вознаграждения лизингодателя  $i^*$ ;
3. Срок договора  $T$ , лет;
4. Величина аванса  $K_a$ , руб.;
5. Общее количество лизинговых платежей  $n$ ;
6. Количество (периодичность) лизинговых платежей в год  $m$ ;
7. Величины платежей  $u_t$  в каждом периоде  $t, t=1, n$ , руб.

Параметры контракта определяют сумму лизинговых платежей, которая является критерием при принятии решений лизингодателем и лизингополучателем.

Рассматривается типичная ситуация, когда ставка комиссионного вознаграждения лизингодателя начисляется на невыплаченную стоимость лизингового имущества (остаток долга) в каждом периоде действия лизингового контракта. В этом случае сумма лизинговых платежей является переменной величиной, зависящей от величины выплат в каждом периоде (графика лизинговых платежей).

**Во второй главе** сформулированы динамические модели принятия решений лизингодателем и лизингополучателем для определения оптимальных параметров лизингового контракта.

Экономические интересы лизингополучателя заключаются в минимизации дисконтированной суммы лизинговых платежей:

$$J_{\text{лп}} = \sum_{t=1}^n \frac{u_t}{(1+r)^t} \rightarrow \min,$$

где  $r$  – ставка дисконтирования.

Величина платежа лизингополучателя ограничена его финансовыми возможностями и условиями контракта в рассматриваемый период:

$$b_t^{\min} \leq u_t \leq b_t^{\max}, \quad t=1, n,$$

где  $b_t^{\min}$ ,  $b_t^{\max}$  – соответственно минимально и максимально возможные лизинговые платежи в период  $t$ .

Максимально возможные лизинговые платежи  $b_t^{\max}$  определяются финансовым состоянием лизингополучателя. Минимально возможные лизинговые платежи  $b_t^{\min}$

устанавливает лизингодатель. При этом выбор лизингодателя является компромиссом между доходностью сделки и риском. Чем меньше лизинговые платежи, особенно в начальные периоды, тем больше доходность лизингодателя, но при этом больше риск не возврата стоимости имущества.

Неоплаченная стоимость лизингового имущества  $x_t$  определяется дискретным уравнением:  
 $x_t = x_{t-1}(1+i) - u_t, \quad t = 1, n,$

где  $i$  – ставка комиссионного вознаграждения в период  $t$ .

Ставка комиссионного вознаграждения определяется выражением:  $i = \frac{i^*}{m}$ .

В начальный период неоплаченная стоимость лизингового имущества  $x_0$  равна:  $x_0 = K_0$ ,  
 где  $K_0$  - стоимость лизингового имущества после выплаты аванса.

Стоимость имущества после выплаты аванса определяется по формуле:  $K_0 = K - K_a$ .

Лизинговый контракт будет успешно выполнен, если в конечный период вся стоимость имущества будет выплачена:  $x_n = 0$ .

Таким образом, модель принятия решений для лизингополучателя запишется в виде:

$$\begin{cases} J_{\text{лп}} = \sum_{t=1}^n \frac{u_t}{(1+r)^t} \rightarrow \min, & (1) \\ b_t^{\min} \leq u_t \leq b_t^{\max}, \quad t = 1, n, & (2) \\ x_t = x_{t-1}(1+i) - u_t, \quad t = 1, n, & (3) \\ x_0 = K_0, & (4) \\ x_n = 0. & (5) \end{cases}$$

Управляющей функцией в модели (1-5) являются платежи лизингополучателя  $u_t, \quad t = 1, n$ , на которые наложено ограничение (2). Сформулированная задача управления лизинговыми платежами является задачей оптимального управления дискретной системой. Задача оптимального управления состоит в нахождении такого управления  $u_t$ , подчинённого ограничению (2), которое переводит дискретную систему (3) из начального состояния (4) в конечное (5), минимизируя критерий оптимальности (1)

Решим задачу оптимального управления для лизингополучателя (1)-(5) с помощью дискретного принципа максимума Понтрягина. Для этого запишем гамильтониан:

$$H_t = \Psi_t [x_{t-1}(1+i) - u_t] - \frac{u_t}{(1+r)^t} = -u_t \left[ \Psi_t + \frac{1}{(1+r)^t} \right] + \Psi_t x_{t-1}(1+i), \quad (6)$$

где  $\Psi_t$  - сопряжённая переменная.

Из условия максимума гамильтониана определим структуру оптимального управления для лизингополучателя:

$$u_t^{\text{opt}} = \begin{cases} b_t^{\max}, & \text{если } \Psi_t + \frac{1}{(1+r)^t} \leq 0 \\ b_t^{\min}, & \text{если } \Psi_t + \frac{1}{(1+r)^t} > 0 \end{cases} \quad t = 1, n. \quad (7)$$

Запишем уравнение для сопряжённой переменной:

$$\Psi_{t-1} = \frac{\partial H}{\partial x} = \Psi_t(1+i), \quad i = n, 1. \quad (8)$$

Следует отметить, что сопряжённое уравнение (8) решается независимо от исходного уравнения (3). Так как формула (8) является рекуррентной, выведем формулу для

сопряжённой переменной через параметры лизингового контракта. Запишем сопряжённую переменную в периоды  $t = 1, 2, \dots, n$  по уравнению (8), считая, что в начальный период времени сопряжённая переменная равна константе  $\Psi_0 = C$ :

$$\Psi_1 = \frac{\Psi_0}{1+i} = \frac{C}{1+i}, \quad \Psi_2 = \frac{C}{(1+i)^2}, \quad \Psi_3 = \frac{C}{(1+i)^3}.$$

Обобщая, запишем решение уравнения (8):

$$\Psi_t = \frac{C}{(1+i)^t}. \quad (9)$$

С учётом (9), выражение для оптимального управления лизингополучателя примет вид:

$$u_t^{opt} = \begin{cases} b_t^{max}, & \text{если } \frac{C}{(1+i)^t} + \frac{1}{(1+r)^t} \leq 0 \\ b_t^{min}, & \text{если } \frac{C}{(1+i)^t} + \frac{1}{(1+r)^t} > 0 \end{cases} \quad t = 1, n. \quad (10)$$

Из условия (10) следует, что если константа  $C$  положительна, то оптимальным будет только одно управление  $u_t^{opt} = b_t^{min}$ , а это не гарантирует в конечный момент времени выполнения граничного условия  $x_n = 0$ . В случае, если константа  $C$  отрицательна, то возможна смена стратегии лизингополучателя с  $u_t^{opt} = b_t^{max}$  на  $u_t^{opt} = b_t^{min}$ . В этом случае граничное условие будет выполнено. Таким образом, искомое оптимальное управление имеет релейный вид: на начальном этапе лизингового контракта, до достижения периода смены стратегии  $t_{ЛП}^*$  лизингополучателю выгодно совершать лизинговые платежи как можно большего размера, а затем минимального размера:

$$u_t^{opt} = \begin{cases} b_t^{max}, & \text{если } 1 \leq t \leq t_{ЛП}^* \\ b_t^{min}, & \text{если } t_{ЛП}^* < t \leq n \end{cases} \quad (11)$$

Оптимальная стратегия выплаты лизинговых платежей лизингополучателем изображена на рисунке 3.

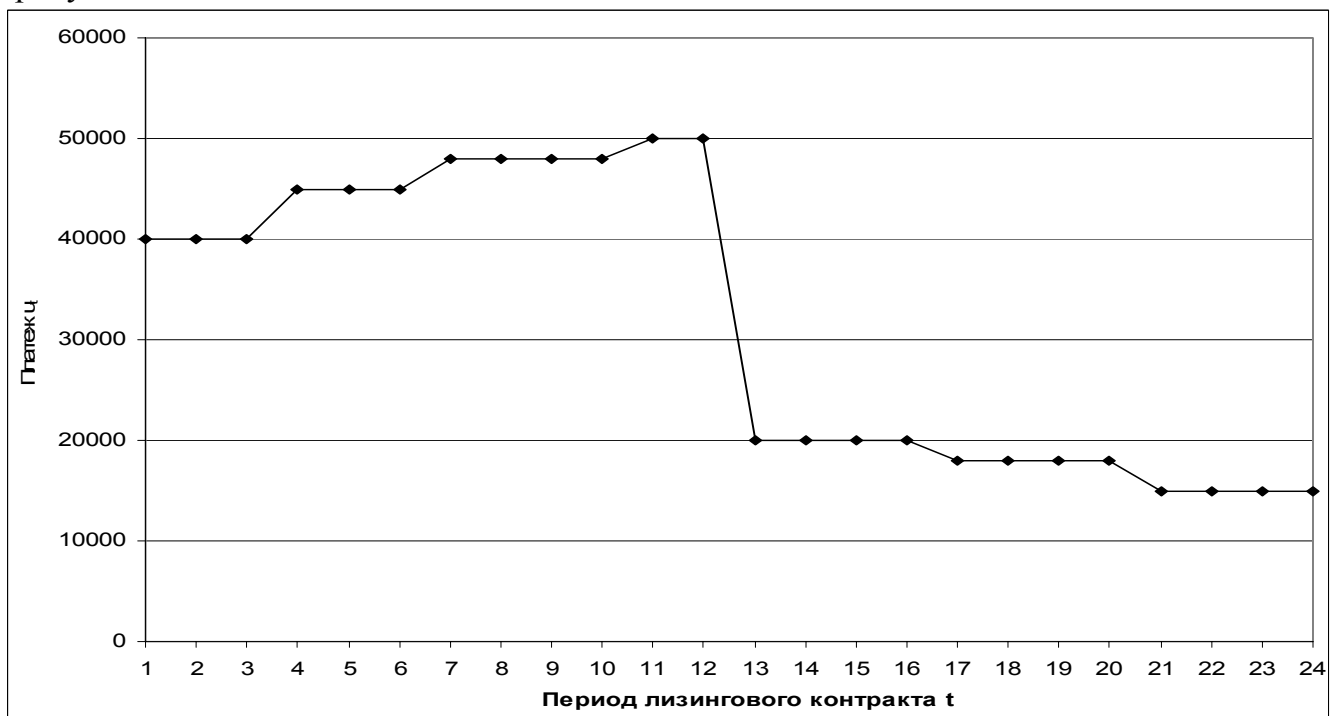


Рисунок 3 – Оптимальная стратегия выплаты платежей лизингополучателем



Подставив в уравнение (3) оптимальное управление (11), используя граничные условия (4) и (5), определим период смены стратегии для лизингополучателя  $t_{opt}$  в результате пересечения двух траекторий, выходящих из начальной и конечной точек (рисунок 4). Оптимальная траектория образуется в результате объединения двух участков рассматриваемых траекторий.

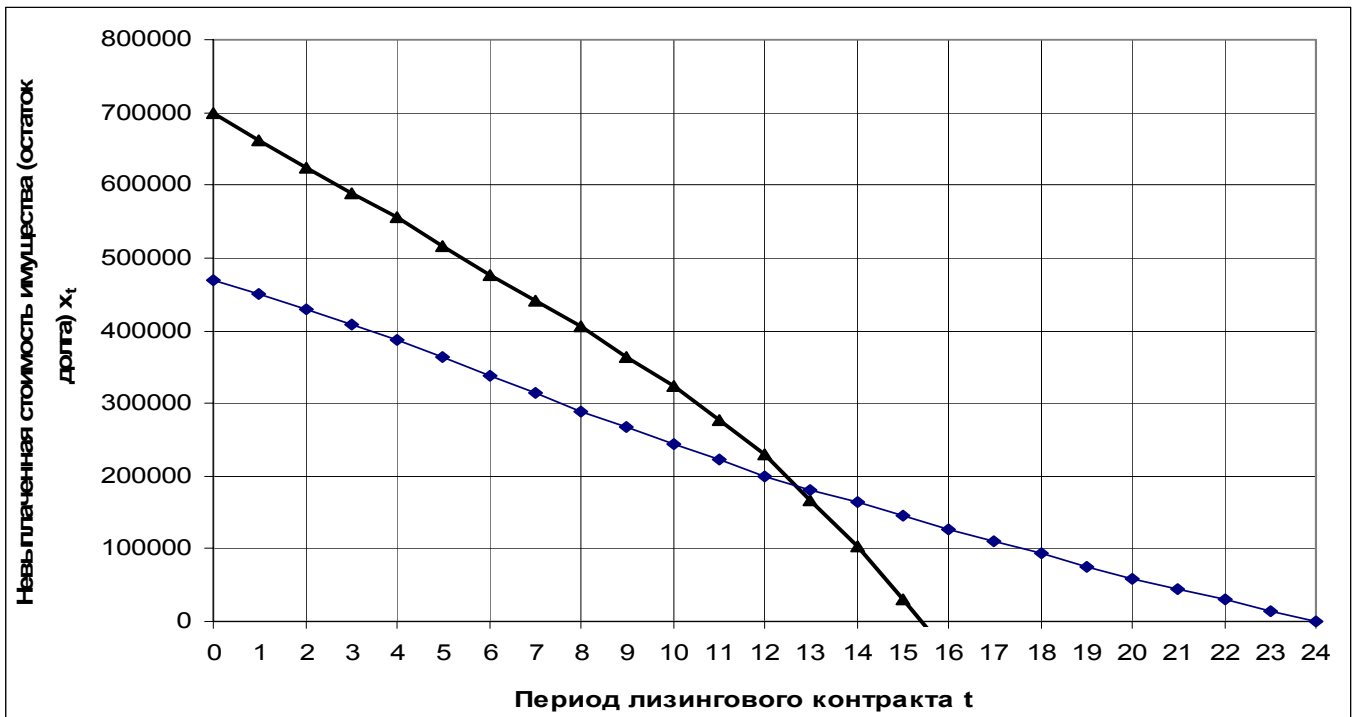


Рисунок 4 – Оптимальная траектория невыплаченной стоимости имущества для лизингополучателя

Стратегия лизингодателя заключается в максимизации дисконтированной суммы лизинговых платежей. Запишем динамическую модель принятия решений лизингодателем:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{ЛД} = \sum_{t=1}^n \frac{v_t}{(1+r)^t} \rightarrow \max, \quad (12) \\ b_t^{\min} \leq v_t \leq b_t^{\max}, \quad t=1, n, \quad (13) \\ x_t = x_{t-1}(1+i) - v_t, \quad t=1, n, \quad (14) \\ x_0 = K_0, \quad (15) \\ x_n = 0, \quad (16) \end{array} \right.$$

где  $v_t$  – размер лизингового платежа, выгодный лизингодателю в период  $t$ .

Управляющей функцией в модели (12-16) являются лизинговые платежи лизингодателя  $v_t$ ,  $t=1, n$ , на которые наложено ограничение (13). Задача оптимального управления состоит в нахождении такого управления  $v_t$ , подчинённого ограничению (13), которое переводит дискретную систему (14) из начального состояния (15) в конечное (16), максимизируя критерий оптимальности (12).

Решим задачу оптимального управления (12)-(16) для лизингодателя. Запишем гамильтониан:

$$H_t = \Psi_t [x_t + ix_{t-1} - v_t] + \frac{v_t}{(1+r)^t} = -v_t [\Psi_t - \frac{1}{(1+r)^t}] + \Psi_t x_{t-1} (1+i) \quad (17)$$

Определим структуру оптимального управления для лизингодателя из условия максимума гамильтониана. Повторим аналогично вышеописанные действия для лизингодателя. Окончательно оптимальное управление примет релейный вид: до достижения

периода смены стратегии  $t_{\text{ЛД}}^*$  лизингодателю выгодно производить платежи как можно меньшей величины, а затем максимальной величины:

$$v_t^{\text{opt}} = \begin{cases} b_t^{\text{min}}, & \text{если } 1 \leq t \leq t_{\text{ЛД}}^* \\ b_t^{\text{max}}, & \text{если } t_{\text{ЛД}}^* < t \leq n \end{cases} \quad (18)$$

Оптимальная стратегия выплаты платежей лизингодателем изображена на рисунке 5.

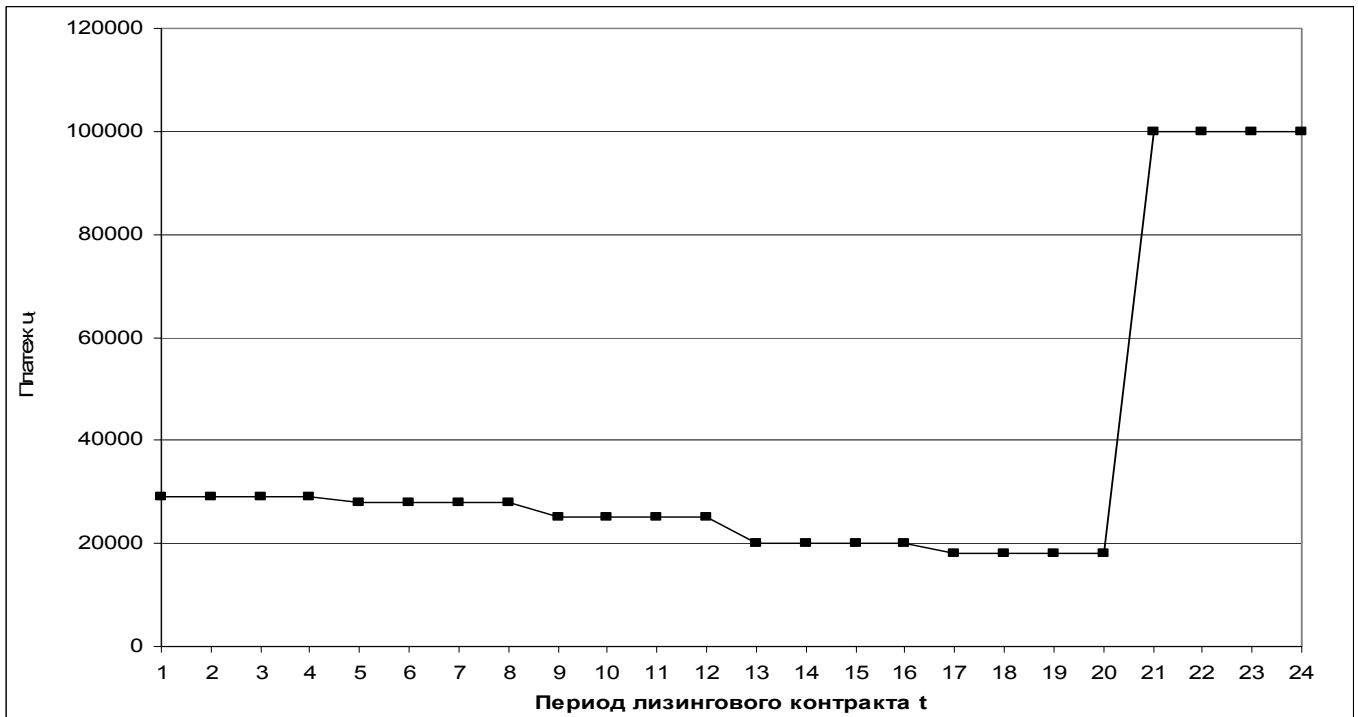


Рисунок 5 - Оптимальная стратегия выплаты платежей лизингодателем

Подставив в уравнение (14) оптимальное управление (18), используя граничные условия (15) и (16) определим период смены стратегии для лизингодателя  $t_{\text{ЛД}}^*$  в результате пересечения двух траекторий, выходящих из начальной и конечной точек (рисунок 6).

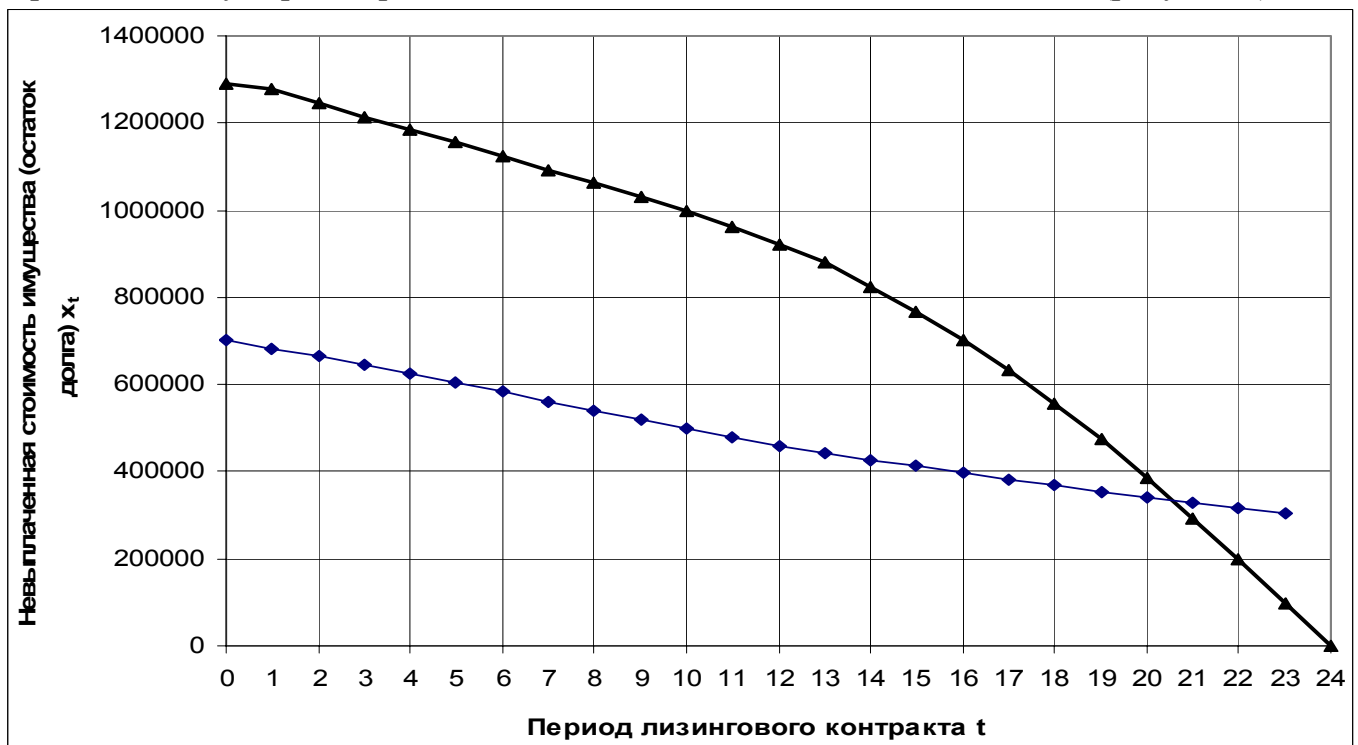


Рисунок 6 – Оптимальная траектория невыплаченной стоимости имущества для лизингодателя

Полученные оптимальные стратегии выплаты платежей лизингополучателя (11) и лизингодателя (18) и соответствующие им траектории определяют минимальную и максимальную сумму лизинговых платежей. Максимальная и минимальная суммы лизинговых платежей являются границами области компромисса для лизингодателя и лизингополучателя. Выбор согласованной суммы лизинговых платежей осуществляется в результате переговоров между лизингодателем и лизингополучателем из области компромисса. Таким образом, область компромисса является экономически обоснованной рекомендацией при принятии решений лизингодателем и лизингополучателем в процессе переговоров.

Рассмотрим численный пример, в котором стоимость лизингового имущества  $K=1000000$  рублей, авансовый платеж  $K_a=300000$  руб., срок договора  $n=24$  месяца, годовая ставка комиссионного вознаграждения  $i^*=12\%$ , имеются данные об ограничениях на лизинговые платежи в каждом периоде. Используя полученные оптимальные стратегии (11) и (18) найдены оптимальные траектории невыплаченной стоимости имущества для лизингодателя и лизингополучателя (рисунок 7).

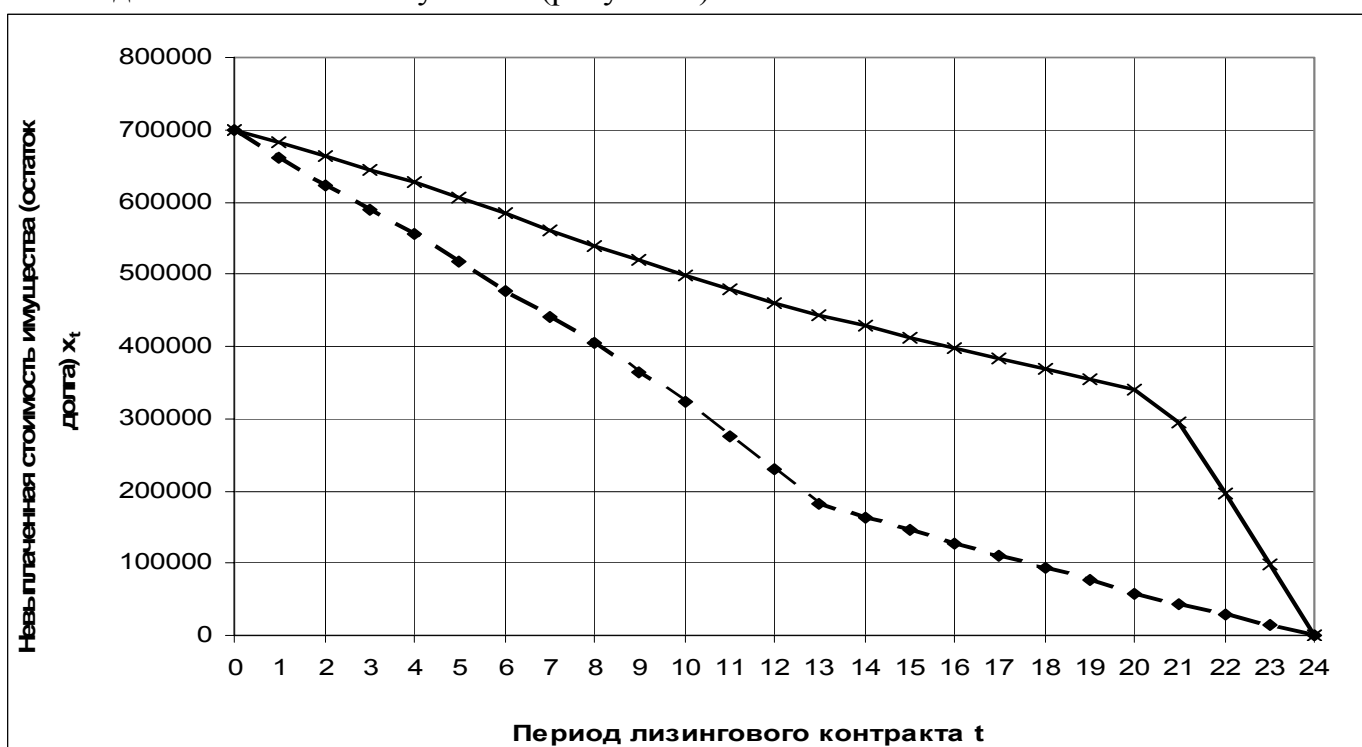


Рисунок 7 – Оптимальные траектории невыплаченной стоимости имущества для лизингодателя и лизингополучателя

Оптимальной траектории невыплаченной стоимости имущества для лизингополучателя (нижняя кривая) соответствует минимальная сумма лизинговых платежей 787000 руб., а оптимальной траектории для лизингодателя (верхняя кривая) соответствует максимальная сумма 864000 руб. Таким образом, найдены границы области компромисса между лизингодателем и лизингополучателем.

На область компромисса участников лизинговой сделки влияют не только размеры ежемесячных платежей  $u_t, t=1, n$ , но и величина аванса  $K_a$ . В таблице 1 приведены расчёты сумм лизинговых платежей, величин удорожания имущества, периодов смен стратегий при различных авансовых платежах.

Таблица 1 - Показатели лизинговой сделки при различных авансовых платежах

Аванс, %	$K_0$ , руб.	$\sum_{t=1}^n u_t$ , руб.		$\lambda$ , %		$t^*$	
		ЛП	ЛД	ЛП	ЛД	ЛП	ЛД
20	800000	887000	941000	8,7	14,1	15	19
30	700000	787000	864000	7,9	8,5	13	20
40	600000	672000	779000	7,4	8,4	9	21

Величина удорожания имущества рассчитывается по формуле:

$$\lambda = \frac{\sum_{t=1}^n u_t - K_0}{K_0} \cdot 100\%$$

На основе описанных математических моделей **разработан алгоритм согласованного выбора параметров лизингового контракта** (рисунки 8).

**Шаг 1.** Лизингополучатель выбирает лизингодателя из имеющихся на рынке.

**Шаг 2.** Ведутся переговоры о величине ставки комиссионного вознаграждения  $i^*$ . Размер ставки определяется финансовым рынком. Следует отметить, что для различных видов имущества могут устанавливаться различные ставки.

**Шаг 3.** Ведутся переговоры о величине авансового платежа  $K_a$ . На выбор аванса наложены следующие ограничения:  $K_a^{min} \leq K_a \leq K_a^{max}$ . Минимально возможную величину аванса  $K_a^{min}$  устанавливает лизингодатель. При этом он руководствуется двумя основными критериями: риском невозврата стоимости имущества и доходностью сделки. Максимальная величина аванса  $K_a^{max}$  определяется финансовыми возможностями лизингополучателя.

**Шаг 4.** На данном шаге лизингодатель и лизингополучатель договариваются о сроке договора лизинга в годах  $T$  и периодичности лизинговых платежей  $m$ . Общее количество лизинговых платежей  $n$  связано со сроком договора и периодичностью платежей соотношением:  $n = Tm$ . Если предлагаемые сроки договора не удовлетворяют лизингополучателя, предлагается вернуться на предыдущий шаг и пересмотреть решение о величине аванса  $K_a$ .

**Шаг 5.** С использованием полученных оптимальных стратегий лизингополучателя (11) и лизингодателя (18) определяются максимальная и минимальная суммы лизинговых платежей. Эти суммы являются границами области компромисса между лизингодателем и лизингополучателем.

**Шаг 6.** Ведутся переговоры о согласованной сумме лизинговых платежей из области компромисса. В качестве выбора точки в области компромисса возможны различные варианты: выбор среднего значения от суммы границ области компромисса, выбор значения в процентном отношении от суммы границ, выбор границ области компромисса.

**Шаг 7.** Выбор графика лизинговых платежей, соответствующего согласованной сумме лизинговых платежей из области компромисса. Происходит заключение лизинговой сделки.

Также во второй главе сформулированы и решены задачи оптимального управления лизинговыми платежами в непрерывной постановке. Полученные решения совпали с аналогичными решениями для дискретных задач оптимального управления.

**В третьей главе** решены дискретные задачи оптимального управления постоянными (аннуитетными) лизинговыми платежами для лизингополучателя и лизингодателя.

В случае аннуитетных платежей оптимальное управление для лизингополучателя (11) запишется:

$$u_t^{opt} = \begin{cases} b^{max}, & \text{если } 1 \leq t \leq t_{III}^* \\ b^{min}, & \text{если } t_{III}^* < t \leq n \end{cases}$$

Начальным периодам  $1 \leq t \leq t_{III}^*$ , соответствует траектория, определяемая дискретным уравнением:

$$x_t = x_{t-1}(1+i) - b^{max}, \quad t = 1, t_{III}^*. \quad (19)$$

В начальный период выполняется начальное условие (4).

Так как формула (19) является рекуррентной, выведем выражение для невыплаченной стоимости лизингового имущества  $x_t$  через параметры лизингового контракта. Запишем неоплаченную стоимость лизингового имущества в периоды  $t = 1, 2, 3, \dots, t_{III}^*$  по уравнению (19), используя начальное условие (4):

$$\begin{aligned} x_1 &= K_0(1+i) - b^{max}, \\ x_2 &= K_0(1+i)^2 - b^{max}[(1+i) - 1], \\ x_3 &= K_0(1+i)^3 - b^{max}[(1+i)^2 - (1+i) - 1]. \end{aligned}$$

Обобщая, запишем выражение для произвольного периода  $t$ :

$$x_t = K_0(1+i)^t - b^{max}[(1+i)^{t-1} - (1+i)^{t-2} - (1+i)^{t-3} - \dots - (1+i)^0]$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой сумму геометрической прогрессии со знаменателем  $(1+i)$  и числом членов прогрессии  $t$ . Применяя формулу для суммы геометрической прогрессии, получим выражение:

$$x_t = K_0(1+i)^t - b^{max} \frac{(1+i)^t - 1}{i}. \quad (20)$$

Конечным периодам  $t_{III}^* < t \leq n$ , соответствует траектория:

$$x_{t-1} = \frac{x_t + b^{min}}{1+i}, \quad t = n, t_{III}^* \quad (21)$$

В конечный период выполняется граничное условие (5).

Запишем неоплаченную стоимость имущества по формуле (21) в периоды  $t = n, n-1, n-2, n-3, \dots, t_{III}^*$ , используя граничное условие (5):

$$\begin{aligned} x_{n-1} &= b^{min} \frac{1}{1+i}, \\ x_{n-1} &= b^{min} \left[ \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} \right], \\ x_{n-2} &= b^{min} \left[ \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} \right]. \end{aligned}$$

Для произвольного периода  $t$  выражение запишется:

$$x_t = b^{min} \left[ \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{n-t}} \right].$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой сумму геометрической прогрессии со знаменателем  $\frac{1}{1+i}$  и числом членов прогрессии  $n-t$ . Применяя формулу для суммы геометрической прогрессии, получим выражение:

$$x_t = b^{min} \left[ \frac{1 - (1+i)^{t-n}}{i} \right]. \quad (22)$$

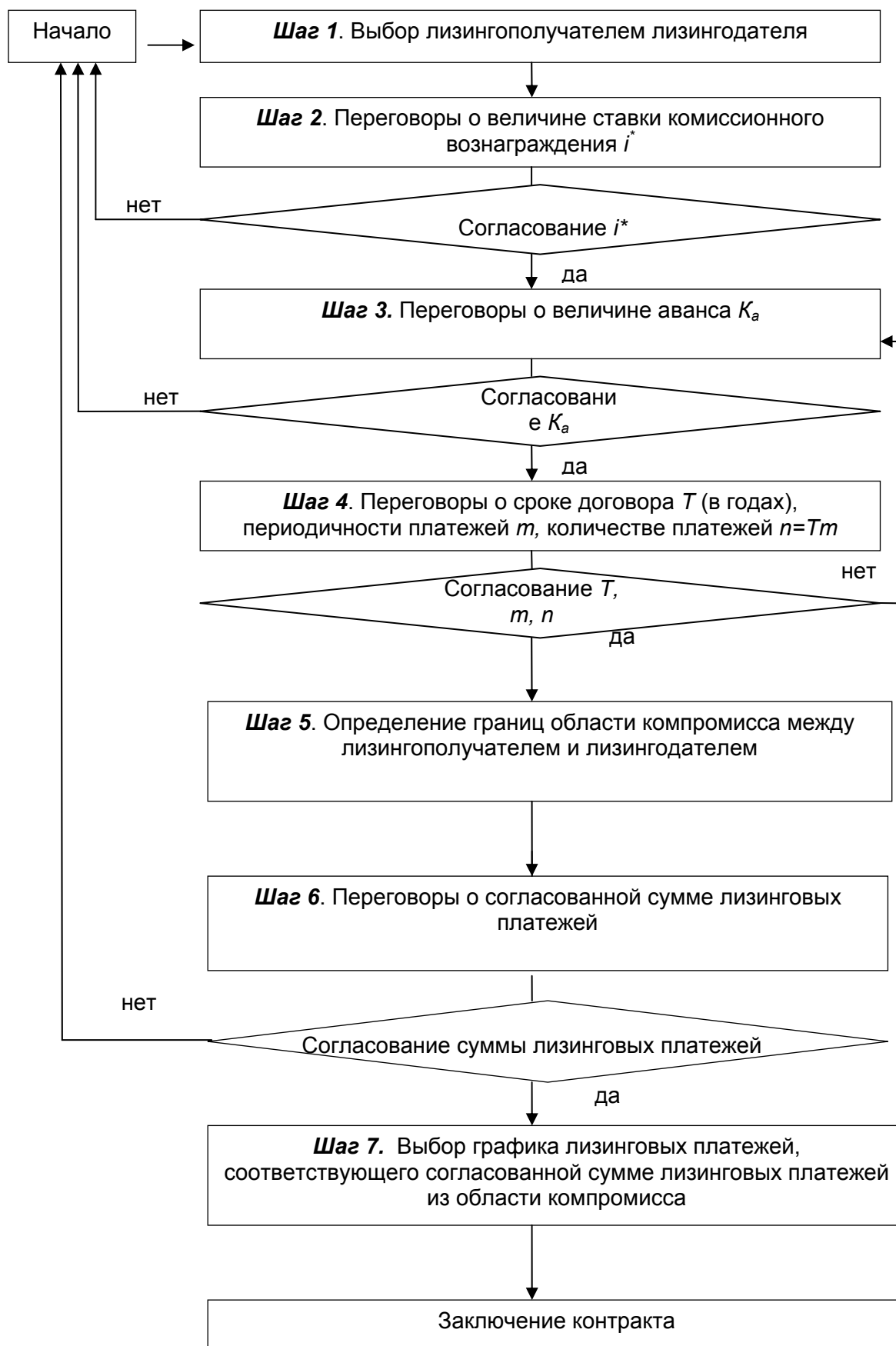


Рисунок 8 – Алгоритм согласованного выбора параметров лизингового контракта  
 Период смены стратегии лизингополучателя  $t_{ЛП}^*$  определится в результате пересечения начального и конечного участков траекторий:

$$t_{ЛП}^* = \log_{1+i} \left[ \frac{b^{max} - b^{min}}{b^{max} - K_0 i - b^{min} (1+i)^{-n}} \right]. \quad (23)$$

Рассмотрим решение задачи оптимального управления аннуитетными платежами с точки зрения лизингодателя. Оптимальное управление для лизингодателя (18) запишется:

$$v_t^{opt} = \begin{cases} b^{min}, & \text{если } 1 \leq t \leq t_{\text{ЛД}}^* \\ b^{max}, & \text{если } t_{\text{ЛД}}^* < t \leq n \end{cases}.$$

Выполняя аналогичные действия для лизингодателя, определим траекторию невыплаченной стоимости имущества в начальные периоды  $1 \leq t \leq t_{\text{ЛД}}^*$ :

$$x_t = K_0(1+i)^t - b^{min} \frac{(1+i)^t - 1}{i}. \quad (24)$$

Траектория невыплаченной стоимости имущества в конечные периоды  $t_{\text{ЛД}}^* < t \leq n$  запишется:

$$x_t = b^{max} \left[ \frac{1 - (1+i)^{t-n}}{i} \right]. \quad (25)$$

Приравнивая уравнения (24) и (25), найдем период смены стратегии для лизингодателя  $t_{\text{ЛД}}^*$ :

$$t_{\text{ЛД}}^* = \log_{1+i} \left[ \frac{b^{max} - b^{min}}{K_0 i + b^{max} (1+i)^{-n} - b^{min}} \right]. \quad (26)$$

Аналитические формулы (20), (22), (24), (25) определяют оптимальные траектории невыплаченной стоимости имущества для лизингополучателя и лизингодателя. Траекториям соответствуют минимальные и максимальные суммы лизинговых платежей, которые являются границами области компромисса.

Рассмотрим численный пример. Условия лизингового договора: стоимость лизингового имущества – 1000000 рублей, аванс 300000 руб., срок договора –  $n=24$  месяца, годовая ставка комиссионного вознаграждения  $i^* = 12\%$ . Минимальный ежемесячный платеж:  $b^{min} = 20000$  рублей, лизингополучатель может выплачивать не больше  $b^{max} = 70000$  рублей в месяц.

По формулам (20), (22) рассчитаем оптимальную траекторию невыплаченной стоимости имущества для лизингополучателя (нижняя ломаная линия на рисунке 9), которой соответствует минимальная сумма лизинговых платежей. С использованием выражений (24), (25) определим оптимальную траекторию для лизингодателя (верхняя ломаная линия на рисунке 9), которой соответствует максимальная сумма лизинговых платежей.

По формулам (23), (26) найдём периоды смены стратегий для лизингополучателя  $t_{\text{ЛП}}^* \approx 6$  месяцев и для лизингодателя  $t_{\text{ЛД}}^* \approx 17$  месяцев. Вычислим минимально возможную сумму лизинговых платежей:

$$S^{min} = t_{\text{ЛП}}^* \cdot b^{max} + (n - t_{\text{ЛП}}^*) \cdot b^{min} = 6 \text{ мес.} \cdot 70000 \text{ руб.} + 18 \text{ мес.} \cdot 20000 \text{ руб.} = 780000 \text{ руб.}$$

Определим максимально возможную сумму лизинговых платежей:

$$S^{max} = t_{\text{ЛД}}^* \cdot b^{min} + (n - t_{\text{ЛД}}^*) \cdot b^{max} = 17 \text{ мес.} \cdot 20000 \text{ руб.} + 7 \text{ мес.} \cdot 70000 \text{ руб.} = 830000 \text{ руб.}$$

Найденные минимальная и максимальная суммы лизинговых платежей являются границами области компромисса между лизингодателем и лизингополучателем.

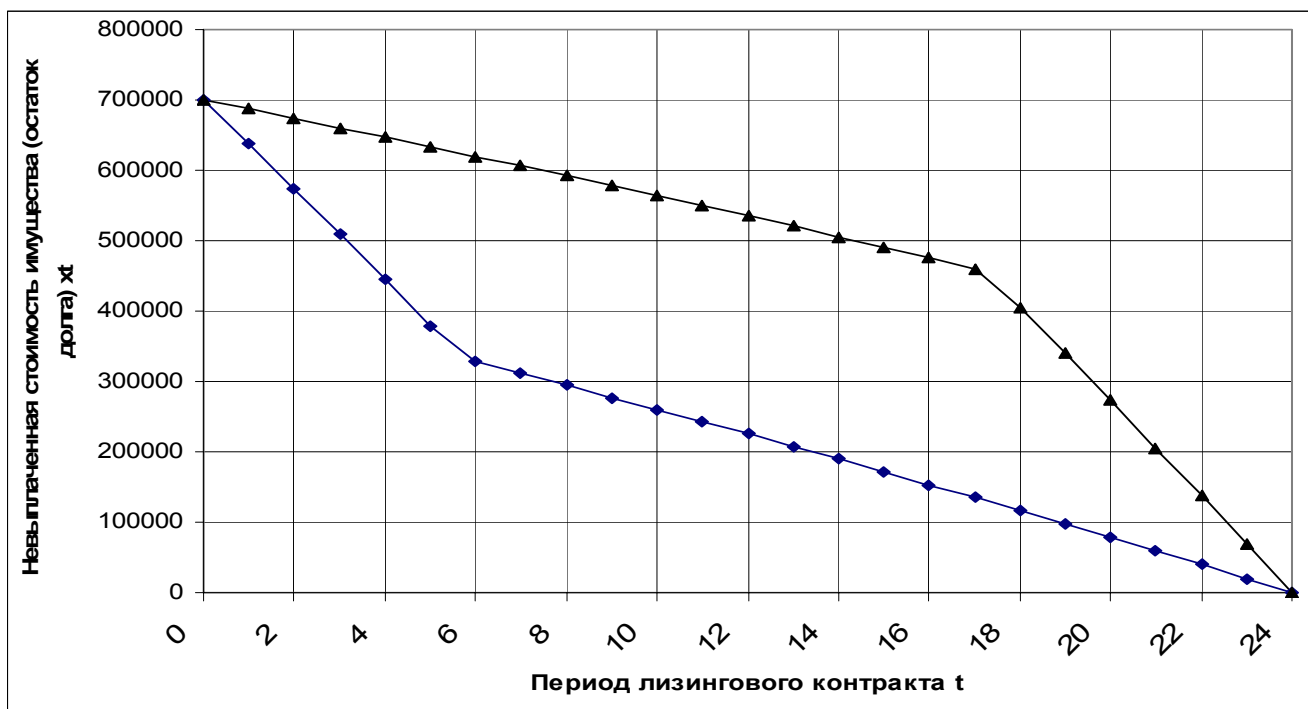


Рисунок 9 – Оптимальные траектории невыплаченной стоимости имущества для лизингодателя и лизингополучателя

Также в третьей главе сформулированы и решены задачи оптимального управления аннуитетными платежами в непрерывной постановке. Найденные решения совпали с аналогичными решениями для дискретных задач оптимального управления аннуитетными платежами.

### III. ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Основные научные и практические результаты, полученные в ходе диссертационного исследования, состоят в следующем:

1. Проведен анализ экономических взаимодействий между участниками лизинговой сделки.
2. Проанализированы параметры лизингового контракта, влияющие на экономические интересы лизингодателя и лизингополучателя.
3. Сформулированы динамические модели принятия решений лизингодателем и лизингополучателем.
5. Найденны оптимальные стратегии выплаты лизинговых платежей для лизингополучателя и лизингодателя, обеспечивающие соответственно минимизацию и максимизацию их целевых функций.
5. Разработан алгоритм согласованного выбора параметров лизингового контракта, позволяющий количественно определить границы области компромисса между лизингодателем и лизингополучателем.
6. Для случая аннуитетных платежей получены аналитические формулы, определяющие границы области компромисса между лизингодателем и лизингополучателем.
7. Разработанный алгоритм согласованного выбора параметров лизингового контракта внедрён в практику работы лизинговой компании ЗАО «ЛиКо».



**Публикации автора по теме диссертации**  
**- в ведущих рецензируемых журналах, определённых**  
**Высшей аттестационной комиссией**

1. **Фудобина, Е. А.** Оптимальная стратегия возмещения стоимости лизингового имущества. [Текст] / О.В. Павлов, Е. А. Фудобина; Экономические науки. № 2(51) – Самара, 2009, Библиогр.: с. 313-317.

2. **Фудобина, Е. А.** Дискретные модели оптимального управления параметрами лизингового контракта [Текст] / О.В. Павлов, Е. А. Фудобина; Вестник СГАУ. №3(23) – Самара, 2010, Библиогр.: с. 128-135.

3. **Фудобина, Е. А.** Математические модели принятия оптимальных решений участниками лизинговой сделки. [Текст] / О.В. Павлов, Е. А. Фудобина; Экономические науки. №7(68) – Самара, 2010, Библиогр.: с. 219-224.

**- в других журналах**

4. **Фудобина, Е. А.** Согласование экономических интересов участников лизинговой сделки [Текст] / О.В. Павлов, Е. А. Фудобина; Высшее образование, бизнес, предпринимательство 2007: Материалы Всероссийской научно-практической конференции «Наука, бизнес, образование'2007» и Всероссийской научно-технической конференции «Экономика Поволжья». Сб. докл. Ч.2. Самар. гос. техн. ун-т, Поволжской ин-т бизнеса–Самара, 2007. – 293 с. – Библиогр.: с. 252-256 .

5. **Фудобина, Е. А.** Определение области компромисса между участниками лизинговой сделки [Текст] / Е. А. Фудобина; Управление качеством и резервы экономического роста предприятий и организаций. Сборник статей Международной научно-практической конференции. – Пенза, 2008– 143 с. – Библиогр.: с. 133-135 .

6. **Фудобина, Е. А.** Задача об оптимальной стратегии выплаты лизинговых платежей [Текст] / О.В. Павлов, Е. А. Фудобина; Проблемы управления экономикой в трансформируемом обществе: сборник статей V Международной научно-практической конференции. –Пенза: Приволжский Дом знаний, 2008 –с.. – 300 с. – Библиогр.: с. 91-94.

7. **Фудобина, Е. А.** Оптимальное управление лизинговыми платежами [Текст] / О.В. Павлов, Е. А. Фудобина; Совершенствование системы управления организацией в современных условиях. Сборник статей Международной научно-практической конференции. – Пенза, 2009, 212 с. – Библиогр.: с. 136-140.

8. **Фудобина, Е. А.** Решение задачи об оптимальной стратегии выплаты лизинговых платежей [Текст] / О.В. Павлов, Е. А. Фудобина; Высшее образование, бизнес, предпринимательство 2009: Материалы Международной научно-практической конференции «Наука, бизнес, образование'2009» и Международной научно-технической конференции «Экономика и управление: теория, методология, практика». Сб. докл. Ч.1. Самар. гос. техн. ун-т, Поволжской ин-т бизнеса. Самара, 2009, 272 с. – Библиогр.: с. 250-256.

9. **Фудобина, Е. А.** Оптимальное управление лизинговым контрактом с точки зрения лизингополучателя [Текст] /Е. А. Фудобина; Современный российский менеджмент: состояние, проблемы, развитие: сборник статей XII Международной научно-методической конференции. – Пенза, Приволжский дом знаний 2010, 176 с. – Библиогр.: с. 109-113.

10. **Фудобина, Е. А.** Дискретные модели оптимального управления лизинговым контрактом лизингодателем [Текст] / Е. А. Фудобина; Современный российский менеджмент: состояние, проблемы, развитие: сборник статей XII Международной научно-метод. конференции. – Пенза, Приволжский дом знаний 2010, 176 с. – Библиогр.: с. 158-161.