На правах рукописи

БЕЛОВ Александр Михайлович

ОБОБЩЕННЫЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХААРА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К КОМПРЕССИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Специальность 05.13.17 – Теоретические основы информатики

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

САМАРА - 2007

Работа выполнена в Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П.Королева» и в Институте систем обработки изображений РАН

Научный руководитель: доктор физико-математических наук В.М.Чернов

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор А.И. Жданов

кандидат физико-математических наук, доцент В.П. Цветов

Ведущее предприятие: ГОУ ВПО «Омский государственный университет имени Ф.М. Достоевского»

Защита состоится 25 мая 2007 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 212.215.07 при государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева» по адресу: 443086, Самара, Московское шоссе, 34.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке СГАУ.

Автореферат разослан 24 апреля 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.т.н., профессор И.В. Белоконов

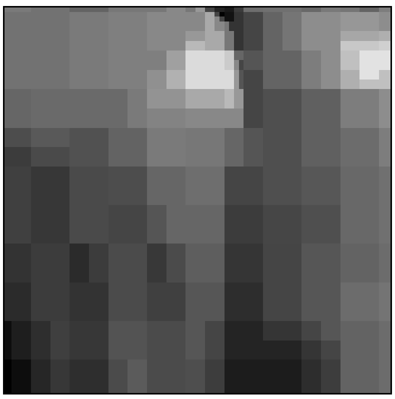
ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Цель работы. Целью работы является разработка методов синтеза и исследование характеристик обобщенных неразделимых двумерных вейвлет-преобразований Хаара в приложении к задачам обработки цифровых изображений.

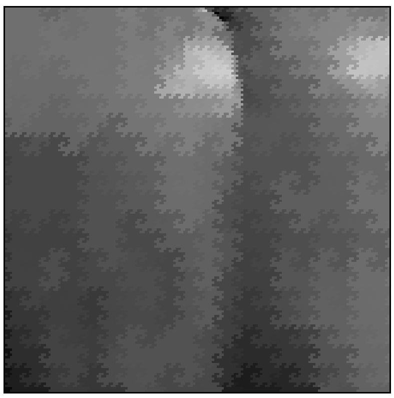
Актуальность темы. Вейвлет-преобразования широко используются в задачах обработки изображений, в частности, в задаче компрессии цифровых изображений. В отличие от других методов компрессии с преобразованием, вейвлет-методы сжатия используют информацию об избыточности изображения при различных масштабах, что позволяет добиться высокой их эффективности.

Самой ранней работой, которую можно отнести к прототипам вейвлет-теории, принято считать работу Хаара (Haar) 1910 г., в этой работе показано, что можно построить кусочно-постоянную функцию ψ, такую, что ее растяжения и сдвиги порождают ортонормированный базис в $L^2(\mathbf{R})$. Однако, как впоследствии показано в работе Стрёмберга (Strömberg), кусочно-постоянные приближения для гладких функций далеки от оптимальных. Так, например, кусочно-линейное приближение дает меньшую погрешность аппроксимации, что стимулировало дальнейшие исследования. Следующим шагом развития вейвлет-теории стало построение Стрёмбергом такой кусочно-линейной функции ψ, которая также порождает ортонормированный базис и дает лучшие приближения для гладких функций. Далее Мейером (Meyer) было построено целое семейство ортонормированных вейвлет-базисов, порожденных бесконечно дифференцируемыми функциями ψ. Это дало новый импульс исследованиям, что привело к открытию знаменитых вейвлетов Добеши (Daubechies) с компактным носителем. Систематизированная теория построения ортонормированных вейвлет-базисов была создана Мейером и Малла (Mallat), благодаря разработке теории кратномасштабного анализа (КМА) сигнала. В основу этой теории легли идеи, развитые в задачах компьютерной визуализации Бартом (Burt) и Адельсоном (Adelson) при анализе изображений на нескольких уровнях разрешения. В 1992 году в своей работе Грёхениг (Gröchenig) и Мадич (Madych) охарактеризовали неразделимые вейвлеты, которые представляют собой многомерные аналоги базиса Хаара. Такой вейвлет-базис был определен, как вейвлет-базис над $L^2(\mathbf{R}^n)$ с компактным носителем, соответствующий кратномасштабному анализу, порожденному масштабирующей функцией вида $\phi = \chi_Q(x)$, где $\chi_Q(x)$ - характеристическая функция (индикатор) компактного множества $Q \subset \mathbf{R}^n$, образующего интегральное самоподобное покрытие $\mathbf{R}^n$. После опубликования этой работы интерес к проблеме построения неразделимых вейвлетов существенно возрос, и множество авторов (Эндрюс (Andrews), Белогай (Belogay), Лагриас (Lagrias), Ванг (Wang), Стричартс (Strichartz) и др.) рассматривали в своих работах построение неразделимых вейвлет-базисов на целочисленных решетках. Однако вопрос о разработке общего подхода к определению носителей, пригодных для построения таких базисов, оставался открытым. В 1999 г. и позже в 2002 г. Мендевиль (Mendevil) и Пише (Piché), исходя из критериев, предложенных Грёхенигом и Мадичем, предложили использовать в качестве носителя фундаментальные области систем счисления с целыми гауссовыми основаниями. В дальнейшем была показана эффективность применения введенных вейвлет-базисов в задаче компрессии изображений.

Компрессия (сжатие), как и большинство других задач обработки изображений, является двумерной задачей. Двумерные вейвлет-преобразования, применяемые в обработке изображений, как правило, являются разделимыми, т.е. представляют собой суперпозицию двух одномерных преобразований. Вейвлет-сжатие, в силу квантования коэффициентов разложения, является сжатием с потерями, и поэтому неизбежно возникновение артефактов на восстановленном изображении. Использование разделимых вейвлетов приводит к появлению блочных и линейных артефактов на изображении, что является нежелательным, поскольку именно к таким ошибкам зрительная система человека наиболее восприимчива (рис. 1).



(а)



(б)

Рис. 1. Артефакты восстановленных изображений для алгоритмов на основе разделимого (а) и неразделимого (б) базисов

Причиной возникновения таких артефактов является то, что разделимые вейвлеты имеют прямоугольные носители, именно на границах этих прямоугольных блоков и возникают линейные артефакты. Неразделимые же вейвлеты имеют своими носителями «фрактальные» области с непрямоугольными границами, что позволяет избежать возникновения линейных артефактов. Этот факт, наряду с возможностью адаптивного выбора базиса, является основной мотивацией для использования неразделимых вейвлетов на непрямоугольных носителях в задачах компрессии изображений. Однако, в прототипных работах Мендевиля и Пише, задача адаптивного выбора вейвлет-базиса не исследовалась, поскольку авторы опирались на узкий класс систем счисления с целым гауссовым основанием. После разработки венгерскими математиками Катаи (Kátai) и Ковачем (Kovács) теории канонических систем счислений (КСС) для произвольных квадратичных полей, стало возможным обобщение результатов работ Мендевиля и Пише на случай фундаментальных областей существенно более общего вида.

Теория канонических систем счислений, как самостоятельная математическая теория, возникла относительно недавно. В 1969 г. в монографии Кнута (Knuth) было упомянуто со ссылкой на работу Пити (Pitti), что любое комплексное число с целочисленными компонентами (целое гауссово число) представимо в виде конечной суммы степеней основания с коэффициентами из алфавита $\{0,1\}$:

$$z = a + bi = \sum_{j=0}^{k(z)} z_j (-1 \pm i)^j \,,\ z_j = \{0,1\},\ a,b \in \mathbf{Z}\,,$$

то есть, в кольце целых гауссовых чисел существуют «бинарные» системы счисления с основанием $(-1 \pm i)$. Произвольное комплексное число представимо в виде бесконечной суммы степеней основания с коэффициентами из алфавита:

$$z = a + bi = \sum_{j=-\infty}^{k(z)} z_j (-1 \pm i)^j \,,\ z_j = \{0,1\},\ a,b \in \mathbf{R}\,.$$

Позже, в 1981 г. Катаи и Ковач представили исчерпывающее описание канонических систем счисления в квадратичных полях и дали аналитический критерий их существования для произвольного квадратичного поля $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$.

Использование теории КСС дает возможность обобщить результаты прототипных работ Мендевиля и Пише на все канонические системы в мнимых квадратичных полях, что и послужило мотивацией для постановки указанной выше цели работы и определило задачи диссертационного исследования и структуру работы.

Задачи диссертационной работы.

1. Теоретическое обоснование возможности построения обобщенных неразделимых вейвлет-преобразований Хаара и разработка метода синтеза таких преобразований.
2. Синтез алгоритмов вейвлет-декомпозиции и вейвлет-реконструкции сигналов на основе предложенного подхода.
3. Разработка методов, алгоритмов и программных средств компрессии цифровых изображений на основе синтезированных преобразований.
4. Экспериментальные исследования предложенных алгоритмов компрессии, сравнение с алгоритмом компрессии на основе разделимого вейвлет-преобразования Хаара.

Методы исследований. В диссертационной работе используются методы абстрактной алгебры, теории чисел, функционального анализа, теории цифровой обработки сигналов и изображений.

Научная новизна работы.

1. Сформулирована и доказана теорема о построении масштабирующих функций кратномасштабного анализа, ассоциированного с фундаментальными областями канонических систем счисления в мнимых квадратичных полях.
2. Разработан метод построения обобщенных неразделимых вейвлет-базисов Хаара.
3. Для введенных вейвлет-базисов разработаны алгоритмы вейвлет-декомпозиции и вейвлет-реконструкции сигнала с полным и частичным деревом декомпозиции.
4. Для задачи компрессии полутоновых изображений на основе синтезированных неразделимых двумерных вейвлет-базисов разработаны и программно реализованы методы компрессии и декомпрессии изображений.
5. Экспериментально показана эффективность предложенного подхода к адаптивному выбору обобщенных неразделимых вейвлет-базисов.

Практическая значимость работы. Практическая значимость работы состоит в том, что разработанные методы дают возможность адаптивного выбора вейвлет-преобразований для повышения качества решения различных задач цифровой обработки сигналов (в частности, задачи компрессии изображений) и представляют теоретическое обоснование перспективных методов решения других задач обработки цифровых изображений (фильтрация, синтез текстур).

Реализация результатов работы. Все разработанные алгоритмы реализованы программно, произведен анализ качества решения задачи компрессии предложенным методом в сравнении с алгоритмом компрессии на основе разделимого преобразования Хаара.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих научных конференциях:

– 2-й летней школе молодых ученых по дифракционной оптике и обработке изображений, Самара, 2004;
– международной конференции «Automation, Control, and Information Technologies» (ACIT), Новосибирск, 2005;
– 3-й летней школе молодых ученых по дифракционной оптике и обработке изображений, Самара, 2005;
– научно-технической конференции с международным участием «Перспективные информационные технологии в научных исследованиях, проектировании и обучении» (ПИТ), Самара, 2006.

Исследования по теме диссертационной работы выполнялись при поддержке РФФИ (проекты №№ 00-01-00600, 03-01-00736, 06-01-00736), Американского фонда гражданских исследований и развития (проект SA-014-02) в рамках российско-американской программы "Фундаментальные исследования и высшее образование", министерства образования и науки Самарской области (грант 2006 года студентам, аспирантам и молодым ученым).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 6 работ. Все работы выполнены соискателем без соавторства.

Структура диссертации. Диссертационная работа, содержащая 102 стр. (без приложений), состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы, составляющего 85 наименований.

На защиту выносятся:

1. Теоретическое обоснование и метод синтеза обобщенных неразделимых вейвлет-преобразований, ассоциированных с каноническими системами счисления в мнимых квадратичных полях.
2. Алгоритмы вейвлет-декомпозиции и вейвлет-реконструкции изображения с полным и частичным деревом декомпозиции для синтезированных вейвлет-базисов.

3. Методы и программные средства компрессии полутоновых изображений на основе алгоритмов с полным и частичным деревом декомпозиции.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В ***первой главе*** диссертации приведены необходимые теоретические сведения из теории кратномасштабного анализа и теории канонических систем счислений. Эта глава не содержит новых результатов; включенные в нее сведения приведены для удобства ссылок и замкнутости изложения.

Далее в автореферате нумерация определений, лемм и теорем соответствует нумерации в тексте диссертационной работы.

Определение 1.3. Линейное преобразование A, определенное на множестве $\mathbf{R}^2$ называется *допустимым растяжением* для некоторой решетки Γ над $\mathbf{R}^2$, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) $A\Gamma \subset \Gamma$, где $A\Gamma = \{y : y = Ax,\ x \in \Gamma\}$;
2) для всех собственных чисел λ_i преобразования A выполняется неравенство $|\lambda_i| > 1$.

Введенное выше понятие допустимого растяжения A приводит к понятию унитарных операторов *растяжения* $U_A : L^2(\mathbf{R}^2) \to L^2(\mathbf{R}^2)$, $U_A : f(x) \mapsto q^{-1/2} f(A^{-1}x)$, где $q = |\det A|$ и *сдвига* $\tau_\gamma : L^2(\mathbf{R}^2) \to L^2(\mathbf{R}^2)$, $\tau_\gamma : f(x) \mapsto f(x-\gamma)$, где $\gamma \in \Gamma$.

Пусть $i \in \mathbf{Z}$, $j \in \Gamma$. Положим $f_{i,j} \equiv U_A^{-i} \tau_j f$, тогда $f_{i,j}(x) = q^{i/2} f(A^i x - j)$, $x \in \mathbf{R}^2$.

Определение 1.4. *Кратномасштабным анализом*, ассоциированным с парой (Γ, A), называется множество замкнутых векторных подпространств из $L^2(\mathbf{R}^2)$ с условиями:

1) $\cdots \subset V_{j-1} \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \cdots$, $j \in \mathbf{Z}$;
2) $\lim\limits_{j \to +\infty} V_j = \text{Çàìûêàíèå} \left(\bigcup\limits_{j \in \mathbf{Z}} V_j \right) = L^2(\mathbf{R}^2)$;
3) $\lim\limits_{j \to -\infty} V_j = \bigcap\limits_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\}$;
4) $f(x) \in V_j$, тогда и только тогда, когда $f(Ax) \in V_{j+1}$, т.е. $V_j = U_A^{-j} V_0$, $j \in \mathbf{Z}$;

5) V_0 инвариантно к оператору сдвига τ_γ, т.е. если $f(x) \in V_0$, тогда $f(x-\gamma) \in V_0$, $\forall \gamma \in \Gamma$;

6) Существует функция $\phi \in V_0$, называемая *маситабирующей функцией*, такая, что семейство $\{\tau_\gamma \phi, \gamma \in \Gamma\}$ образует базис Рисса подпространства V_0.

Для функции ϕ справедливо равенство:

$$\phi = \sum_j h_j \phi_{1,j} \; , \; j \in \Gamma ,$$

где $h_j = \langle \phi, \phi_{1,j} \rangle$, $\forall j \in \Gamma$ и $\sum_{j \in \Gamma} |h_j|^2 = 1$. Коэффициенты h_j называют *фильтр-коэффициентами маситабирующей функции*.

На основе определения кратномасштабного анализа, определяется подпространство W_i как ортогональное дополнение V_i до V_{i+1}, $i \in \mathbf{Z}$. Согласно результату Мейера существуют $(q-1)$ функций $\psi^1, \dots \psi^{q-1}$ (*материнский вейвлет*), таких, что их сдвиги образуют ортонормированный базис W_0, и семейство функций

$$\{\psi_{i,j}^l\} \; i \in \mathbf{Z}, \; j \in \Gamma, \; l = 1, \dots, q-1$$

является базисом пространства $L^2(\mathbf{R}^2)$. Для ψ^l справедливо равенство:

$$\psi^l = \sum_j g_j^l \phi_{1,j} \; , \; j \in \Gamma ,$$

где $g_j^l = \langle \psi^l, \phi_{1,l} \rangle, \forall j \in \Gamma$. Коэффициенты g_j^l называются *фильтр-коэффициентами вейвлет-функции*.

Определение 1.6. Целое алгебраическое число $\alpha = a \pm b\sqrt{d}$ называется *основанием канонической системы счисления* в кольце $\mathbf{S}(\sqrt{d})$ целых элементов квадратичного поля $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$, если любой целый элемент z поля однозначно представим в форме конечной суммы

$$z = \sum_{j=0}^{K(z)} z_j \alpha^j, \quad z_j \in D = \{0,1,\dots,|Norm(\alpha)|-1\}, \; Norm(\alpha) = a^2 - db^2 .$$

Определение 1.7. Пара (α, D) называется *канонической системой счисления* (КСС) в кольце $\mathbf{S}(\sqrt{d})$ целых элементов поля $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$. Множество $D = \{0,1,\dots,|Norm(\alpha)|-1\}$ называется алфавитом КСС.

Пусть задана система счисления (α, D), тогда произвольное комплексное число $z \in \mathbf{C}$ представимо в виде:

$$z = \sum_{j=0}^{k(z)} z_j \alpha^j + \sum_{j=-\infty}^{-1} z_j \alpha^j, \ z_j \in D,$$

где первой сумме соответствует «целая» часть z, а второй – «дробная» часть z.

Определение 1.8. *Фундаментальной областью* $T(\alpha, D) \in \mathbf{C}$ для КСС (α, D) в кольце $\mathbf{S}(\sqrt{d})$ целых элементов поля $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$, называется множество комплексных чисел с нулевой «целой» частью, т.е:

$$T(\alpha, D) = \left\{ \sum_{j=-\infty}^{-1} d_j \alpha^j, d_j \in D \right\}.$$

Пусть отображение $\theta : \mathbf{C} \to \mathbf{R}^2$, такое, что $\theta : z = x + yi \mapsto (x, y)$. Введем *образ* фундаментальной области $T(\alpha, D)$, как $T^*(\alpha, D) = \theta\big(T(\alpha, D)\big)$.

Во ***второй главе*** сконцентрированы основные теоретические результаты диссертационной работы. Здесь приведено теоретическое обоснование возможности построения обобщенных двумерных вейвлетов-базисов Хаара. Центральным результатом этой главы является доказанная теорема, о том, что характеристическая функция фундаментальной области произвольной КСС является масштабирующей функцией соответствующего КМА. Доказательство теоремы предварено доказательством ряда лемм:

Лемма 2.2. *Пусть* (α, D) *- каноническая система счисления* $\mathbf{S}(\sqrt{d})$, $\alpha = a + b\sqrt{d}$, $\alpha \in \mathbf{S}(\sqrt{d})$, *тогда матрица*

$$A = \begin{pmatrix} a & bd \\ b & a \end{pmatrix},$$

ассоциированная с операцией умножения произвольного числа $z \in \mathbf{S}(\sqrt{d})$ *на основание системы счисления* α, *будет являться матрицей допустимого растяжения для решетки* $\Gamma_{\mathbf{S}(\sqrt{d})}$.

Лемма 2.3. *Пусть* (α, D) *- каноническая система счисления в кольце* $\mathbf{S}(\sqrt{d})$, $\alpha = a + b\sqrt{d}$, $D = \{d_0, d_1, d_2 \ldots d_{|Norm(\alpha)|-1}\}$, *тогда множество* D, *состоящее из*

$Norm(\alpha)$ элементов, будет полной системой вычетов для множества классов эквивалентности $\mathbf{S}(\sqrt{d})/A\mathbf{S}(\sqrt{d})$.

Лемма 2.4. *Пусть задана КСС (α, D) в кольце $\mathbf{S}(\sqrt{d})$, тогда аддитивные сдвиги фундаментальной области $T(\alpha, D)$ этой КСС на слагаемое из кольца $\mathbf{S}(\sqrt{d})$, образуют непересекающееся покрытие комплексной плоскости $\mathbf{C}$, т.е. выполняются следующие теоретико-множественные соотношения:*

1) $\mathbf{C} = \bigcup_{s \in \mathbf{S}(\sqrt{d})} (T(\alpha, D) + s)$;

2) $(T(\alpha, D) + s_1) \bigcap (T(\alpha, D) + s_2) = \varnothing$, *при* $s_1 \neq s_2$, $s_1, s_2 \in \mathbf{S}(\sqrt{d})$.

Лемма 2.5. *Пусть (α, D) есть каноническая система счисления в кольце $\mathbf{S}(\sqrt{d})$,*

$$T(\alpha, D) = \left\{ z = \sum_{j=-\infty}^{-1} d_j \alpha^j : d_j \in D \right\} \subset \mathbf{C}$$

есть ее фундаментальная область, тогда множество $T^*(\alpha, D)$ измеримо и справедливо соотношение

$$\mu\left(T^*(\alpha, D)\right) = \begin{cases} \sqrt{|d|}, & \text{ïðè } d \equiv 2,3 (\operatorname{mod} 4); \\ \dfrac{\sqrt{|d|}}{2}, & \text{ïðè } d \equiv 1 (\operatorname{mod} 4), \end{cases}$$

где μ - плоская (двумерная) мера Лебега.

Из доказанных лемм и результатов работы Грёхенига и Мадича, следует основная теорема:

Теорема 2.1. *Пусть (α, D) - каноническая система счисления в кольце $\mathbf{S}(\sqrt{d})$, $\alpha = a + b\sqrt{d}$ - ее основание, $D = \{d_0, d_1, d_2 \ldots d_{|Norm(\alpha)|-1}\}$ - ее алфавит и*

$$T(\alpha, D) = \left\{ \sum_{j=-\infty}^{-1} d_j \alpha^j : d_j \in D \right\}$$

- фундаментальная область этой КСС. Пусть $\Gamma_{\mathbf{S}(\sqrt{d})}$ - решетка над кольцом $\mathbf{S}(\sqrt{d})$

$$A = \begin{pmatrix} a & bd \\ b & a \end{pmatrix},$$

тогда функция $\phi = \chi_{T(\alpha, D)}$ является масштабирующей функцией кратномасштабного анализа ассоциированного с парой $(\Gamma_{\mathbf{S}(\sqrt{d})}, A)$.

Из теоремы 2.1 следует ***метод построения*** двумерных аналогов вейвлет-базисов Хаара.

Так как для любой КСС (α, D) в кольце $\mathbf{S}(\sqrt{d})$ существует КМА, ассоциированный с парой $(\Gamma_{\mathbf{S}(\sqrt{d})}, A)$, и функция $\phi = \chi_{T(\alpha,D)}$ является масштабирующей функцией этого КМА, то:

1) функции вейвлет-базиса определяются равенством:

$$\psi^i = \sum_{j=1}^{q} u_{i+1,j} \phi_{1,d_j} \,,$$

где $u_{i,j}$ - элементы унитарной матрицы U, в которой $u_{1,j} = q^{-1/2}$, $j = 1 \ldots q$, $u_{i,j} = \sqrt{\dfrac{2}{q}} \cos\left(\dfrac{(i-1)(2j-1)\pi}{2q}\right)$, $i = 2 \ldots q$, $j = 1 \ldots q$, $d_j \in D$, $q = |\det A|$;

2) коэффициенты фильтра для преобразования с базисом ψ^i определяются равенствами:

$$h_j = u_{1,j}, \; j = 1 \ldots q,$$

$$g_i^j = u_{i,j}, \; i = 2 \ldots q, \; j = 1 \ldots q.$$

В ***третьей главе*** диссертации рассматривается применение предложенных вейвлет-базисов к задаче компрессии изображений. Здесь синтезируются алгоритмы декомпозиции и реконструкции сигнала на основе введенных во второй главе вейвлет-базисов. Рассмотрено два случая:

1) изображение полностью покрывается фундаментальной областью КСС, для этого случая предложены алгоритмы декомпозиции и реконструкции с полным деревом декомпозиции (*FDT – Full Decomposition Tree*);
2) изображение покрывается фрагментом фундаментальной области КСС, для этого случая предложены алгоритмы декомпозиции и реконструкции с частичным деревом декомпозиции (*PDT – Partial Decomposition Tree*).

Также разработаны методы компрессии и декомпрессии изображений на основе синтезированных алгоритмов.

В ***четвертой главе*** диссертации представлены результаты экспериментов и сравнительный анализ предложенных алгоритмов с алгоритмом компрессии на основе разделимого вейвлет-базиса Хаара с точки зрения качества решения задачи компрессии. Качество компрессии оценивалось по следующим параметрам:

Коэффициент компрессии $k_c = \frac{V_I}{Va_I}$, где V_I - объем исходного изображения в байтах, Va_I - объем архива (компрессированного изображения) в байтах.

Отношение сигнал шум (PSNR):

$$PSNR = 10\log_{10}\left(\frac{255^2}{\frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}\left(I(m,n)-\hat{I}(m,n)\right)^2}\right),$$

где M, N - размеры изображения, $I(m,n)$ - отсчеты исходного изображения, $\hat{I}(m,n)$ - отсчеты восстановленной из архива аппроксимации исходного изображения.

Далее, для удобства обозначений, алгоритмы компрессии на основе алгоритмов с полным деревом декомпозиции для КМА, ассоциированного с КСС (α, D), обозначены $\mathrm{FDT}(\alpha)$, а алгоритм на основе разделимого преобразования Хаара – Haar.

На примере текстурных изображений была исследована эффективность предложенного подхода к адаптивному выбору вейвлет-базиса. Исследовалась выборка из 130 полутоновых текстурных изображений размером 512×512 пикселей, из атласа «Brodatz». По этому множеству изображений были вычислены параметры $PSNR$ и k_c для следующих алгоритмов: $\mathrm{FDT}(-1+i)$, $\mathrm{FDT}(i\sqrt{2})$, $\mathrm{FDT}(-1+i\sqrt{3})$ и Haar, при ширине интервала квантования $\delta = 10$. Эксперименты показали, что исходная выборка изображений может быть разбита на 4 класса, в каждом из которых наиболее эффективен только один из рассмотренных алгоритмов. Распределение исходной выборки по классам представлено в таблице 1 (таблица 4.2 в тексте диссертации).

Таблица 1. Распределение исходной выборки по классам

Класс	Число изображений	Процентное соотношение
K_{Haar}	60	46%
$K_{FDT(-1+i)}$	13	10%
$K_{FDT(i\sqrt{2})}$	41	32.5%
$K_{FDT(-1+i\sqrt{3})}$	15	11.5%

В диссертационной работе проводились исследования зависимости эффективности алгоритмов от ширины интервала квантования δ. По классам изображений $K_{FDT(-1+i)}$, $K_{FDT(i\sqrt{2})}$, $K_{FDT(-1+i\sqrt{3})}$ были рассчитаны усредненные значения параметров $PSNR$ и k_c для алгоритмов $\mathrm{FDT}(-1+i)$, $\mathrm{FDT}(i\sqrt{2})$, $\mathrm{FDT}(-1+i\sqrt{3})$ и Haar, при значениях интервала квантования $\delta = 2\ldots20$. Эксперименты показали, что все рассмотренные алгоритмы эффективны в «своих» классах при всех рассмотренных интервалах квантования. Графики зависимостей представлены на рисунках 2, 3 (рисунки 4.9, 4.11 в тексте диссертации).

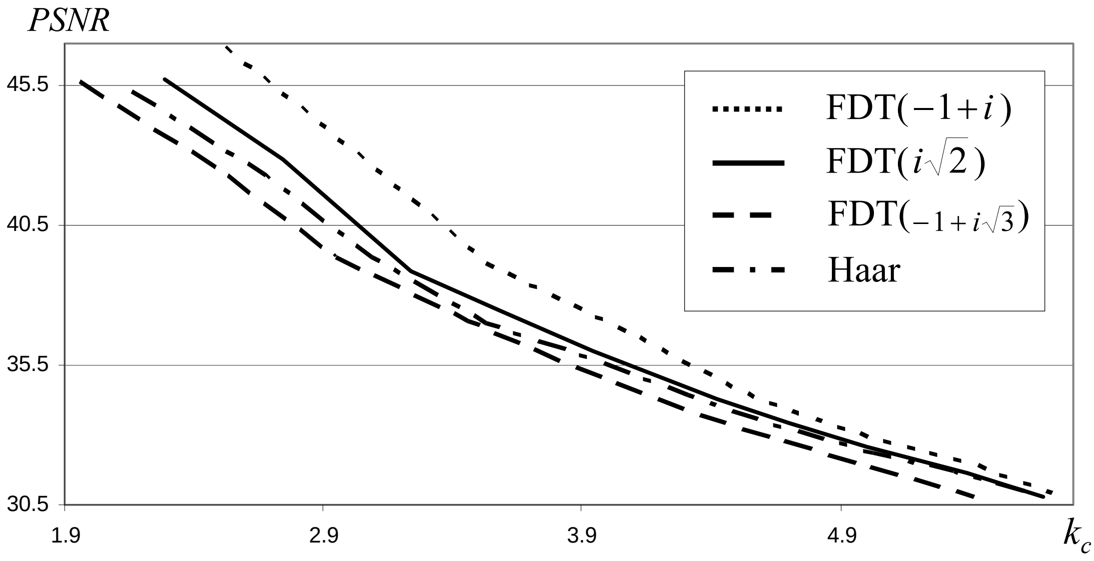


Рис. 2. Зависимость $PSNR$ от k_c *для класса $K_{FDT(-1+i)}$*

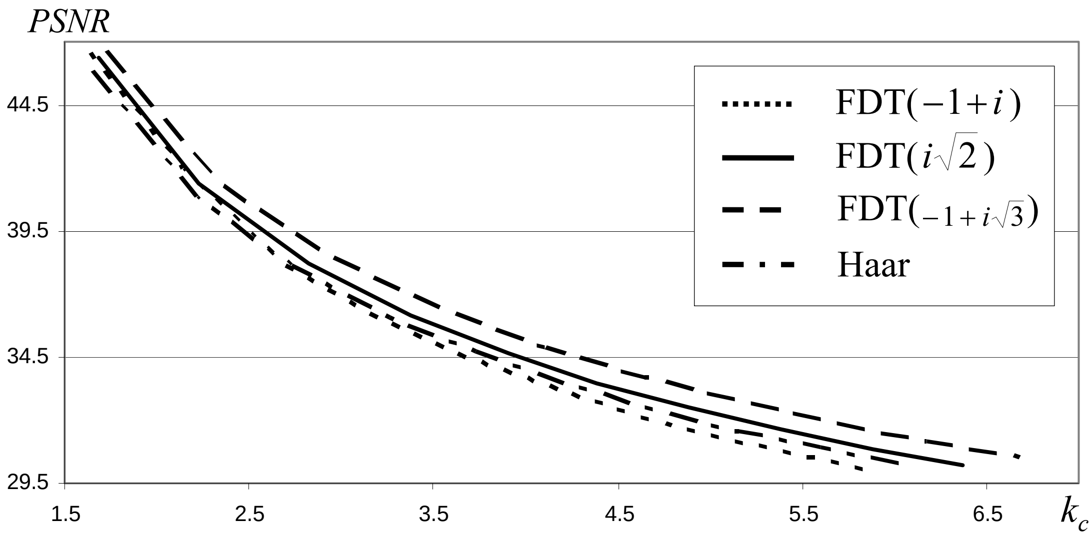


Рис. 3. Зависимость $PSNR$ от k_c *для класса $K_{FDT(-1+i\sqrt{3})}$*

Для всех исследованных алгоритмов был рассчитан относительный коэффициент сжатия, как отношение к коэффициенту сжатия алгоритма на основе разделимого вейвлет-преобразования Хаара. Зависимость относительного коэффициента сжатия от ширины интервала квантования, для исследованных алгоритмов, представлена на рисунке 4 (рисунок 4.12 в тексте диссертации).

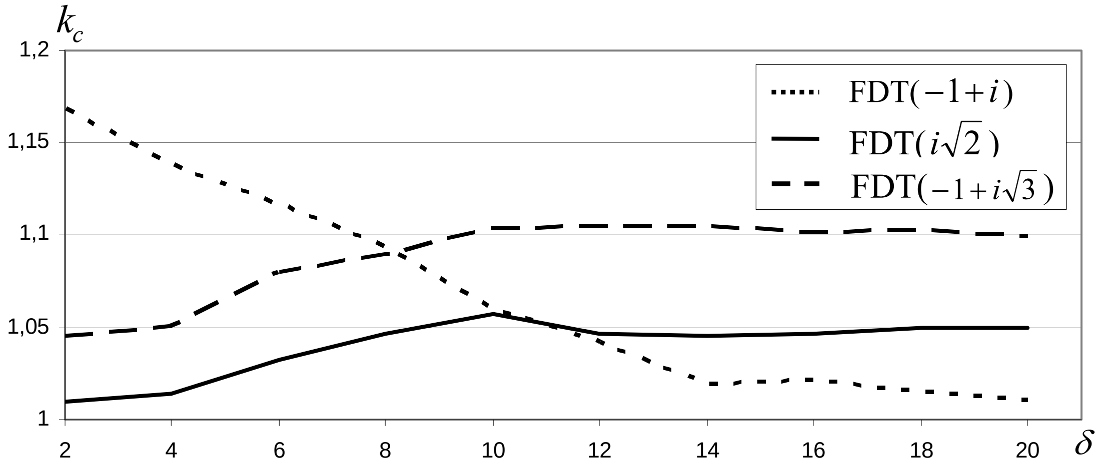


Рис. 4. Зависимость относительного k_c от ширины интервала квантования δ

Вопрос эффективности адаптивного выбора алгоритмов на основе обобщенных вейвлет-базисов Хаара, в задачах компрессии исследовался также на классе дактилоскопических изображений. Задача компрессии решалась для алгоритмов $\mathrm{FDT}(-1+i)$, $\mathrm{FDT}(i\sqrt{2})$, $\mathrm{FDT}(-1+i\sqrt{3})$ и Haar на выборке из 40 изображений дактилограмм, размером 256×256 пикселей, при ширине интервала квантования $\delta=10$. Усредненные по выборке результаты представлены в таблице 2 (таблица 4.4 в тексте диссертации).

Таблица 2. Средние значения $PSNR$ и k_c для изображений дактилограмм

	$\mathrm{FDT}(-1+i)$	$\mathrm{FDT}(i\sqrt{2})$	$\mathrm{FDT}(-1+i\sqrt{3})$	Haar
$PSNR$	36.729	36.938	31.920	33.909
k_c	6.461	6.395	4.555	6.258

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Доказано, что со всеми каноническими системами счислений в кольцах целых элементов мнимых квадратичных полей ассоциирован кратномасштабный анализ, причем его масштабирующая функция – характеристическая функция фундаментальной области системы счисления.
2. Разработан метод построения неразделимых вейвлет-базисов Хаара для кратномасштабного анализа, ассоциированного с каноническими системами счисления в кольцах целых элементов мнимых квадратичных полей.
3. Для предложенных вейвлет-базисов Хаара синтезированы алгоритмы вейвлет-декомпозиции и вейвлет-реконструкции сигнала.

4. Экспериментально показано, что применение разработанных алгоритмов компрессии на основе введенных и исследованных вейвлет-преобразований, позволяет избежать возникновения блочных и линейных линейных артефактов.
5. Показано, что алгоритмы компрессии на основе разработанных вейвлет-преобразований повышают качество решения задачи компрессии за счет возможности адаптивного выбора вейвлет-базиса.

Основные положения диссертации отражены в публикациях:

1. Белов А.М. "Применение канонических систем счисления в задаче построения неразделимого вейвлет-преобразования" //Тезисы второй летней школы молодых ученых по дифракционной оптике и обработке изображений. – Самара, СГАУ, 2004. – С. 51 – 53.
2. Belov A., "Non-separable Haar-type wavelets and canonical number systems" //Proceedings of the Second IASTED International Multi-Conference on ACIT – Signal and Image Processing. – Novosibirsk, ACTA press, 2005. – Pp. 286 – 289.
3. Белов А.М. "Неразделимые вейвлеты Хаара и канонические системы счисления" //Тезисы третей летней школы молодых ученых по дифракционной оптике и обработке изображений. – Самара, СГАУ, 2005. – С. 26 – 28.
4. Белов А.М. "Применение канонических систем счисления в задаче построения неразделимых хааро-подобных вейвлетов" //Компьютерная оптика, №28, Самара - Москва, ИСОИ РАН, СГАУ, 2006. – С. 119 – 123.
5. Белов А.М. "Реализация вейвлет-декомпозиции для неразделимых вейвлетов на фундаментальных областях канонических систем счислений" //Тезисы докладов международной научно-технической конференции ПИТ-2006. – Самара, СГАУ, 2006. – Том 2. С. 81 – 85.
6. Белов А.М. "Алгоритмы декомпозиции сигнала на основе неразделимых вейвлет-преобразований Хаара" //Компьютерная оптика. – Самара - Москва, ИСОИ РАН, СГАУ, 2007. – Том 31, № 1. С. 63 – 66.

Подписано в печать 20.04.07
Формат 60 x 84 1/16
Бумага офсетная, усл. печ. л. 1,0
Тираж 100 экз.
Заказ № _____