

УДК 531.55:521.2

Л.В.Кудряков, С.А.Пиявский

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ВЫХОДА  
В ЗАДАННУЮ ТОЧКУ ПРОСТРАНСТВА

Среди траекторий перехода между двумя точками в центральном поле имеются такие, двигаясь по которым, можно осуществить маневр перехода за минимальное время. Представляет интерес исследование этих траекторий с целью оценки быстродействия кривых каждого исследуемого класса. Исследованию подвергаются лишь импульсные траектории как более экономичные.

Известно, что продолжительность перехода между двумя точками в центральном поле для траекторий различного класса (эллипс, парабола, гипербола) определяется по-разному. Так, для эллиптической траектории это время может быть определено по формуле Ламберта:

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \left[ (\alpha - \sin \alpha) - (\beta - \sin \beta) \right], \quad (1)$$

где  $\mu$  - гравитационный параметр;  
 $t$  - продолжительность маневра;  
 $a$  - большая полуось траектории перехода;  
 $\alpha, \beta$  - параметры, определяемые по формулам

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(R+z)+\ell}{4a}}; \quad (2)$$

$$\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(R+z)-\ell}{4a}};$$

$R$  - расстояние от центра притяжения до отправной точки;

$z$  - расстояние от центра притяжения до конечной точки;

$\ell$  - расстояние по прямой между точками перехода.

Введем обозначения

$$x = \frac{a}{R+z}; \quad y = \frac{b}{R+z}. \quad (3)$$

Тогда можно записать

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+y}{4x}}; \quad \sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-y}{4x}}. \quad (4)$$

При этом справедливо соотношение

$$0 < y < 1, \quad (5)$$

так как

$$0 \leq b \leq R+z. \quad (6)$$

С учетом этого (I) запишется в виде:

$$z = t \sqrt{\frac{\mu}{(R+z)^3}} = \sqrt{x^3} \left[ \left( 2 \operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{1+y}{4x}} - \sin 2 \operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{1+y}{4x}} \right) - \right. \\ \left. - \left( 2 \operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{1-y}{4x}} - \sin 2 \operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{1-y}{4x}} \right) \right] \quad (7)$$

или

$$z = \sqrt{x^3} \left[ \left( \operatorname{arcsin} \frac{1}{2x} \sqrt{(1+y)(4x-1-y)} - \frac{1}{2x} \sqrt{(1+y)(4x-1-y)} \right) - \right. \\ \left. - \left( \operatorname{arcsin} \frac{1}{2x} \sqrt{(1-y)(4x-1+y)} - \frac{1}{2x} \sqrt{(1-y)(4x-1+y)} \right) \right], \quad (8)$$

где должны удовлетворяться условия

$$\frac{1}{2x} \sqrt{(1+y)(4x-1-y)} \leq 1; \quad (9)$$

$$\frac{1}{2x} \sqrt{(1-y)(4x-1+y)} \leq 1. \quad (10)$$

Решение (9), (10) приводится соответственно к виду

$$x \geq \frac{1}{2} (1+y); \quad (11)$$

$$x \geq \frac{1}{2} (1-y). \quad (12)$$

С учетом (4) для решения (8) следует использовать условие (9). Численные исследования, приведенные по (8) с учетом (5) и (6) показали (рис. I), что  $z$  стремится к своему минимуму на траекториях,

соответствующих  $x \rightarrow \infty$ , или согласно (2) - при  $\alpha \rightarrow \infty$ , т.е. на параболических траекториях. При этом полагаем, что

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} &= \sin \frac{\alpha}{2}; \\ \frac{\beta}{2} &= \sin \frac{\beta}{2}, \end{aligned} \quad (13)$$

откуда с учетом (2) и (3) получим

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin \left( \pm \sqrt{\frac{1+y}{x}} \right); \\ \sin \beta &= \sin \left( \pm \sqrt{\frac{1-y}{x}} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Раскладывая (14) в ряд Тейлора, получим

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \pm \sqrt{\frac{1+y}{x}} - \frac{1}{6} \left( \pm \sqrt{\frac{1+y}{x}} \right)^3; \\ \sin \beta &= \pm \sqrt{\frac{1-y}{x}} - \frac{1}{6} \left( \pm \sqrt{\frac{1-y}{x}} \right)^3. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставив (13) и (15) в (1), получим прямую, на которой достигается минимум

$$t = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \left[ \left( \frac{1+y}{x} \right)^{3/2} \pm \left( \frac{1-y}{x} \right)^{3/2} \right] \quad (16)$$

или

$$z = \frac{1}{6} \left[ (1+y)^{3/2} \pm (1-y)^{3/2} \right]. \quad (17)$$

Из (16), используя (3), можно получить известную формулу Эйлера для определения продолжительности перелета между двумя точками параболической траектории:

$$t = \frac{1}{6\sqrt{\mu}} \left[ (R+z+c)^{3/2} \pm (R+z-c)^{3/2} \right] \quad (18)$$

(здесь знак плюс соответствует случаю, когда угловая дальность между конечными точками больше  $\pi$  и минус, если она меньше  $\pi$ ).

На основании (5) из (17) следует, что наименьшее значение времени перехода достигается на траекториях, имеющих фокусы по одну сторону от  $\ell$  (см.рис. I).

Представляет интерес установление областей существования гиперболических траекторий выхода в заданную точку. Рассмотрим задачу, исходя из минимума времени перехода. Продолжительность

маневра для такой траектории  
определяется формулой

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \left[ e (\operatorname{tg} H_1 - \operatorname{tg} H_2) - \ln \frac{\operatorname{tg} (45^\circ + \frac{H_1}{2})}{\operatorname{tg} (45^\circ + \frac{H_2}{2})} \right], \quad (19)$$

где  $\cos H_1 = \frac{ae}{a+R}$ ;  $\cos H_2 = \frac{ae}{a+z}$ ;

$a$  - действительная полуось  
гиперолы;

$e$  - эксцентриситет.

Пусть на такой траектории для начальной и конечной точек  
удовлетворяются соответственно соотношения:

$$R = \frac{p}{1 + e \cos u_0}; \quad (20)$$

$$z = \frac{p}{1 + e \cos (u - u_0)}, \quad (21)$$

где  $u_0$  - положение линии апсид;

$u$  - аргумент широты.

Введем обозначения:

$$z = \frac{\sqrt{\mu} t}{\sqrt{\bar{a}^3}}; \quad \bar{a} = \frac{a}{R}; \quad \bar{z} = \frac{z}{R}; \quad \bar{p} = \frac{p}{R}. \quad (22)$$

С учетом этого

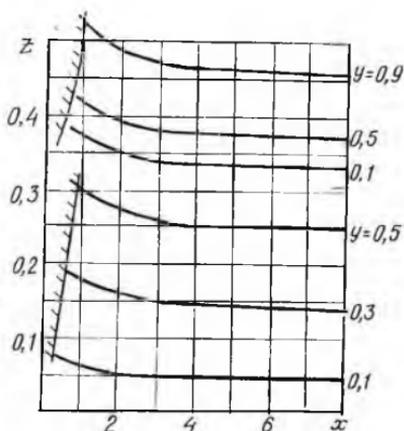
$$\bar{p} = 1 + e \cos u_0; \quad (23)$$

$$\frac{\bar{p}}{z} = 1 + e \cos (u - u_0); \quad (24)$$

$$z = \sqrt{\bar{a}^3} \left[ e (\operatorname{tg} H_1 - \operatorname{tg} H_2) - \ln \frac{\operatorname{tg} (45^\circ + \frac{H_1}{2})}{\operatorname{tg} (45^\circ + \frac{H_2}{2})} \right], \quad (25)$$

где

$$\cos H_1 = \frac{\bar{a}e}{1 + \bar{a}}; \quad \cos H_2 = \frac{\bar{a}e}{\bar{a} + \bar{z}}.$$



Р и с . I

Уравнения (20), (23), (24) определяют неизвестные параметры переходной гиперболической траектории: фокальный параметр  $\bar{\rho}$ , эксцентриситет  $-e$  и положение линии апсид  $u_0$ .

Действительная полуось гиперболы определяется из соотношения

$$\bar{a} = \frac{\bar{\rho}}{e^2 - 1} \quad (26)$$

Из (23) и (24) следует, что

$$e = \frac{\bar{z} - 1}{\cos u_0 - \bar{z} \cos(u - u_0)} \quad (27)$$

Тогда предельное значение истинной аномалии  $\eta_*$ , соответствующее значению  $u = 0$  определяется из (27)

$$\cos \eta_* = \cos u_0,$$

где  $\cos u_0$  при  $u = 0$  определяется из соотношения

$$e \cos u_0 (1 - \bar{z}) = \bar{z} - 1,$$

откуда

$$\cos u_0 = -\frac{1}{e} \quad (28)$$

Из (28) следует первое ограничение на область гиперболических траекторий. Действительно, так как согласно (28)  $e > 1$ , то, следовательно,

$$\frac{\bar{z} - 1}{\cos u_0 - \bar{z} \cos(u - u_0)} \geq 1,$$

откуда, так как  $\bar{z} < 1$ , следует

$$\cos u_0 - \bar{z} \cos(u - u_0) \leq 0$$

и, значит,

$$\bar{z} - 1 \leq \cos u_0 - \bar{z} \cos(u - u_0)$$

или

$$[1 + \cos(u - u_0)] \leq (1 + \cos u_0) \frac{1}{\bar{z}} \quad (29)$$

Пусть  $\bar{z} = 0,5$ . Тогда возможны следующие области для  $u_0$  и  $u$  (рис.2): при  $0 \leq u_0 \leq 180^\circ - 0 \leq u \leq 360^\circ$ , а при  $180^\circ \leq u_0 \leq 360^\circ - 0 \leq u \leq 360^\circ$ . Другое ограничение накладывает условие непересечения с поверхностью планеты, т.е.

$$\bar{z}_\pi \geq \bar{R}_z,$$

(30)

где  $\bar{z}_\pi = \frac{z_\pi}{R}$  - отношение наименьшего расстояния (перигейного) к начальному;  
 $\bar{R}_z = \frac{R_z}{R}$  - отношение земного радиуса к начальному расстоянию.

Из (21) следует, что

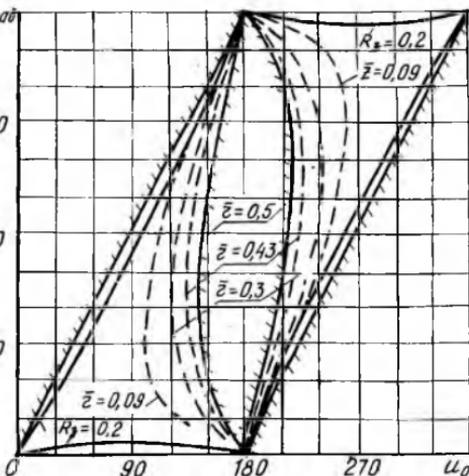
$$\bar{z} = \frac{1 + e \cos u_0}{1 + e \cos (u - u_0)}. \quad (31) \quad u, \text{ град}$$

Но в перигее  $u = 0$   
 и, значит, с учетом (30) 270  
 из (31) получим

$$\frac{1 + e \cos u_0}{1 + e} \geq \bar{R}_z \quad (32) \quad 180$$

откуда, подставив значение для  $e$  из (27), получим

$$\bar{z} [\cos u_0 - \cos (u - u_0)] \geq \bar{R}_z [\cos u_0 - \bar{z} \cos (u - u_0) + \bar{z} - 1]. \quad (33)$$



Р и с. 2

Возможны следующие варианты:

$$1) \cos u_0 > \bar{z} \cos (u - u_0)$$

это соответствует

$$\cos (u - u_0) \geq \frac{\bar{R}_z - \bar{z}}{\bar{R}_z - 1} \left( \frac{1}{\bar{z}} \cos u_0 + 1 \right), \quad (34)$$

при этом  $\bar{R}_z < \bar{z}$ ;

$$2) \cos u_0 < \bar{z} \cos (u - u_0),$$

и это соответствует

$$\cos (u - u_0) \leq \frac{\bar{R}_z - \bar{z}}{\bar{R}_z - 1} \left( \frac{1}{\bar{z}} \cos u_0 + 1 \right). \quad (35)$$

Численные исследования позволяют построить по приведенным выше рассуждениям области существования гиперболических траекторий, ограниченных угловыми расстояниями между точками перехода и минимально возможным удалением от центра притяжения (см. рис. 2).

Преобразуем (23) и (24) к одному уравнению

$$e \left[ \cos u_0 - \cos (u - u_0) \right] = \bar{\rho} \left( 1 - \frac{1}{2} \right),$$

раскрывая которое, получим квадратное уравнение относительно  $\bar{\rho}$  :

$$(A^2 + 1)\bar{\rho}^2 + 2(AB - 1)\bar{\rho} + B^2 + 1 - e^2 = 0, \quad (36)$$

где

$$A = \frac{\sin \frac{u}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \sin \frac{u}{2}}{\cos \frac{u}{2}};$$

$$B = -\operatorname{tg} \frac{u}{2}.$$

Исследование знака дискриминанта уравнения (36) приводит к выводу, что оно имеет решение для всех  $u$  и  $e$ , удовлетворяющих неравенству

$$e > \frac{|A+B|}{\sqrt{A^2+1}}. \quad (37)$$

Из решения (36) при  $e \rightarrow \infty$  следует

$$\lim_{e \rightarrow \infty} \bar{\rho} = \lim_{e \rightarrow \infty} \frac{e\sqrt{A^2+1}}{A^2+1} = \infty.$$

Но при таких значениях  $e$  и  $\bar{\rho}$  согласно (26) полюсь гиперболы стремится к нулю, т.е.

$$\lim_{\substack{\bar{\rho} \rightarrow \infty \\ e \rightarrow \infty}} \bar{u} = \lim_{\substack{\bar{\rho} \rightarrow \infty \\ e \rightarrow \infty}} \frac{\bar{\rho}}{e^2 - 1} = 0.$$

Это соответствует траектории минимального времени, согласно (25), представляющей собой прямую, соединяющую начальную и конечную точки перехода и проходящую от центра притяжения на минимальном расстоянии, соответствующем

$$\bar{r}_{min} = \frac{1}{\cos (u - u_0)}$$