произвольные нормальные аффинные многообразия. Оказывается, что каждое аффинное алгебраическое многообразие, допускающее структуру моноида ранга 0, $n-1$ или n, является торическим, и структуры ранга $n-1$ описываются корнями Демазюра многообразия X. В частности, получена полная классификация структур коммутативных моноидов на нормальных аффинных поверхностях. Отмечу, что в недавнем препринте [2] получена классификация структур некоммутативных моноидов на нормальных аффинных поверхностях.

Я расскажу про полученные в [3] классификации, описывающие структуры коммутативных моноидов на нормальных аффинных поверхностях на двух языках. Если задавать умножение $\mu\colon X \times X \to X$ с помощью коумножения $\mu^*\colon \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[X]$, то кроме естественного сложения на аффинных пространствах и коумножения $\mu^*\colon \chi^u \mapsto \chi^u \otimes \chi^u$, происходящего из торической структуры, имеется серия коумножений

$$\mu^*\colon \chi^u \mapsto \chi^u \otimes \chi^u (1 \otimes \chi^e + \chi^e \otimes 1)^{\langle p,u \rangle},$$

где через e обозначен один из корней Демазюра, соответствующих примитивному вектору p на луче конуса торического многообразия. Кроме того, структуру моноида на X можно задать с помощью структуры моноида на тотальном координатном пространстве $\bar{X}$ с помощью конструкции Кокса.

Список литературы

[1] I. Arzhantsev, S. Bragin, Yu. Zaitseva. Commutative algebraic monoid structures on affine spaces. Commun. in Cont. Math. **22** (2020), no. 8, 1950064: 1–23.
[2] B. Bilich. Classification of noncommutative monoid structures on normal affine surfaces, arXiv: `math.AG/2106.04884` (2021)
[3] S. Dzhunusov, Yu. Zaitseva. Commutative algebraic monoid structures on affine surfaces. Forum Math. **33** (2021), no. 1, 177–191.
[4] A. Rittatore. Algebraic monoids with affine unit group are affine. Transform. Groups **12** (2007), no. 3, 601–605.

Автоморфизмы инд-многообразий обобщённых флагов

М.В. Игнатьев[1]
Самарский университет, Самара, Россия
`mihail.ignatev@gmail.com`

Пусть V — счётномерное векторное пространство над полем комплексных чисел. *Обобщённым флагом* называется цепь вложенных подпространств $\mathcal{F}$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 20–01–00091а.

в V такая, что каждое подпространство из $\mathcal{F}$ имеет в $\mathcal{F}$ непосредственного предшественника или непосредственного потомка (в смысле частичного упорядочения по включению). Мы будем обозначать через (F'_α, F''_α) пару (подпространство; его непосредственный потомок) $=$ (непосредственный предшественник подпространство; само подпространство). Таким образом, набор подпространств из $\mathcal{F}$ можно записать в виде $\{(F'_\alpha, F''_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ для некоторого множества индексов $\mathcal{A}$, упорядоченного включениями пар. Мы требуем также, чтобы для любого ненулевого вектора $v \in V$ существовал единственный индекс $\alpha \in \mathcal{A}$, для которого $v \in F''_\alpha \setminus F'_\alpha$.

Базис E пространства V называется *совместимым* с обобщённым флагом $\mathcal{F}$, если существует сюръекция $\sigma\colon E \to \mathcal{A}$, удовлетворяющая условию $F'_\alpha = \langle e \in E \mid \sigma(e) < \alpha\rangle_{\mathbb{C}}$, $F''_\alpha = \langle e \in E \mid \sigma(e) \leqslant \alpha\rangle_{\mathbb{C}}$ для любого $\alpha \in \mathcal{A}$. Несложно проверить, что любой обобщённый флаг обладает совместимым с ним базисом [1], см. также [3]. Обобщённый флаг $\mathcal{H}$ называется *слабо совместимым* с базисом E, если он совместим с каким-то базисом пространства V, отличающимся от E в конечном числе векторов. Возьмём такой обобщённый флаг $\mathcal{H}$ и предположим дополнительно, что существуют изоморфизм линейно упорядоченных множеств $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ и конечномерное подпространство $U \subset V$ такие, что $F + U = \varphi(F) + U$ и $\dim(F \cap U) = \dim(\varphi(F) \cap U)$ для любого $F \in \mathcal{F}$. В этом случае говорят, что обобщённый флаг $\mathcal{H}$ *E-соизмерим* с $\mathcal{F}$.

Обозначим через $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E, V)$ множество всех обобщённых флагов в V, E-соизмеримых с $\mathcal{F}$. Оно является (вообще говоря, бесконечномерным) инд-многообразием [1], см. также [3]. Понятно, что в в случае конечномерного пространства V такая конструкция приводит к обычному многообразию флагов, являющемуся однородным пространством алгебраической группы $\mathrm{SL}(V)$. Оказывается, что и в счётномерном случае наше инд-многообразие обобщённых флагов можно трактовать как однородное пространство финитарной инд-группы $\mathrm{SL}(V)$.

Нас интересует группа автоморфизмов инд-многообразия $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E, V)$. В конечномерном случае компонента единицы этой группы совпадает с проективной группой $\mathrm{PSL}(V)$ (за исключением некоторых специальных случаев), см., к примеру, [5]. Оказывается, что в счётномерном случае она оказывается значительно «больше». А именно, это будет группа Макки некоторой пары пространств с естественным спариванием.

Напомним, что группой Макки пары векторных пространств T, R с заданным невырожденным билинейным спариванием $T \times R \to \mathbb{C}\colon (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ называется группа $G(T, R) = \{\varphi \in \mathrm{GL}(T) \mid \varphi^*(R) = R\}$ [4]. Здесь

$\mathrm{GL}(T)$ — группа всех обратимых линейных операторов на T, $\varphi^*\colon T^* \to T^*$ — двойственный оператор к оператору φ и R отождествляется с подпространством в T^* с помощью спаривания. Условимся также для произвольного счётномерного пространства B с выбранным базисом обозначать через B_* линейную оболочку двойственных линейных функций в B^*.

Для каждого подпространства $F \in \mathcal{F}$ выберем дополнительное подпространство U_F в V, натянутое на $U_F \cap E$, так, чтобы $U_{F_1} \supset U_{F_2}$ при $F_1 \subset F_2$. Обозначим теперь $V_E^{\mathcal{F}} = \bigcap_{F\in\mathcal{F}}((F_*)^* \oplus U_F)$, $V_{*E}^{\mathcal{F}} = \bigcap_{F\in\mathcal{F}}(F_* \oplus (U_F)^*)$. Ясно, что между этими пространствами есть естественное невырожденное спаривание. Обозначим через G соответствующую группу Макки. Она действует на инд-многообразии $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E, V)$ по правилу

$$\varphi \cdot \mathcal{H} = ((\varphi^*)^{-1}(\mathcal{H}^\perp))^\perp \cap V,\ \varphi \in G,\ \mathcal{H} \in \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E, V).$$

Здесь $\mathcal{H} = \{H^\perp,\ H \in \mathcal{H}\}$, где $H^\perp = \{\lambda \in V_{*E}^{\mathcal{F}} \mid \lambda(H) = \{0\}\}$. Обозначим через $\mathrm{St}_{\mathcal{F}}$ стабилизатор обобщённого флага $\mathcal{F}$ в группе G. Пусть также $\mathrm{GL}(E, V)$ — группа обратимых линейных операторов на V, которые оставляют на месте все базисные векторы из E, кроме, быть может, конечного числа. Наконец, назовём обобщённый флаг $\mathcal{F}$ *симметричным*, если при очевидном изоморфизме $V \cong V_*$ он переходит в $\mathcal{F}^\perp$. Основной результат таков.

Теорема. *Если $\mathcal{F}$ не симметричен, то группа автоморфизмов инд-многообразия $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E, V)$ изоморфна проективной группе* $\mathrm{P}(\mathrm{GL}(E, V) \cdot \mathrm{St}_{\mathcal{F}})$. *Если же $\mathcal{F}$ симметричен, то она изоморфна группе* $\mathrm{P}(\mathrm{GL}(E, V) \cdot \mathrm{St}_{\mathcal{F}}) \rtimes \mathbb{Z}_2$.

Аналогичный результат имеется для инд-многообразий изотропных обобщённых флагов в пространстве с невырожденной формой. Доклад основан на совместной работе с И. Пенковым [2].

Список литературы

[1] I. Dimitrov, I. Penkov. Ind-varieties of generalized flags as homogeneous spaces for classical ind-groups. IMRN, no. 55 (2004), 2935–2953.

[2] M. Ignatev, I. Penkov. Automorphism groups of ind-varieties of generalized flags Transformation Groups, submitted, arXiv: `math.AG/2106.00989` (2021).

[3] M.V. Ignatyev, I. Penkov. Ind-varieties of generalized flags: a survey of results. Journal of Mathematical Sciences **248** (2020), 255–302, arXiv: `math.AG/1701.08478`.

[4] G.W. Mackey. On infinite-dimensional linear spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **57** (1945), no. 2, 155–207.

[5] A. Onishchik. Transitive compact transformation groups. Math. Sb. (N.S.) **60** (1963), 447–485 English Transl.: AMS Transl. (2) **55** (1966), 5–58.