Лиевская структура многообразий разрешимых йордановых алгебр

А.В. Попов
Ульяновск, Россия
klever176@rambler.ru

Будем предполагать, что основное поле $\mathbb{F}$ имеет нулевую характеристику.

Пусть L — произвольная алгебра Ли, G — алгебра Грассмана счетного ранга. Известно [1], [2], что пространство $J(L) = G \otimes L \oplus G_1$ с операцией умножения $\circ$, заданной правилами

$$(a \otimes g) \circ h = h \circ (a \otimes g) = a \otimes gh, \text{ если } g \in G_0,\ h \in G_1,$$

$$(a \otimes g) \circ (b \otimes h) = [a, b] \otimes gh, \text{ если } g, h \in G_1,$$

является йордановой алгеброй с тождествами

$$x^4 \equiv 0, \qquad (x_1 x_2)(y_1 y_2)(z_1 z_2) \equiv 0. \tag{1}$$

Более того, данная конструкция определяет мономорфизм $\mathcal{J}$ из решетки многообразий алгебр Ли в решетку многообразий йордановых алгебр, удовлетворяющих тождествам (1). А именно, пусть $\mathcal{V}$ — многообразие алгебр Ли и L — произвольная алгебра Ли, порождающая $\mathcal{V}$, то есть $\mathcal{V} = \operatorname{var}(L)$. Тогда $\mathcal{J}(\mathcal{V}) = \operatorname{var}(J(L))$.

Для многообразия разрешимых йордановых алгебр $\mathcal{V}$ определим обёртывающее многообразие алгебр Ли $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ как наименьшее лиевское многообразие такое, что $\mathcal{W} \subset \mathcal{J}(\mathcal{L}(\mathcal{V}))$, где $\mathcal{W}$ — подмногообразие $\mathcal{V}$, состоящее из всех алгебр, удовлетворяющих тождествам (1).

Как оказывается, многие свойства произвольного многообразия разрешимых йордановых алгебр $\mathcal{V}$ полностью определяются его обёртывающим многообразием $\mathcal{L}(\mathcal{V})$. Ниже представлены некоторые из таких свойств.

1. Для произвольной алгебры A определим по индукции её сильно разрешимые степени $A^{((k))}$: $A^{((0))} = A$, $A^{((k))}$ — наименьший идеал A, содержащий в себе $A^{((k-1))}A^{((k-1))}$. Многообразие $\mathcal{V}$ сильно разрешимо, если для некоторого k любая алгебра A из $\mathcal{V}$ сильно разрешима индекса не более k, то есть $A^{((k))} = 0$.

   Теорема 1. Многообразие разрешимых йордановых алгебр $\mathcal{V}$ сильно разрешимо тогда и только тогда, когда многообразие $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ разрешимо.

2. Многообразие $\mathcal{V}$ называется T-первичным, если произведение любых ненулевых T-идеалов (то есть идеалов, инвариантных относительно эндоморфизмов алгебры) в свободной алгебре данного многообразия не равно нулю.

   Теорема 2. Если многообразие разрешимых йордановых алгебр $\mathcal{V}$ является T-первичным, то $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ также T-первично и, кроме того, $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождествам (1).

3. **Теорема 3.** Многообразие разрешимых йордановых алгебр $\mathcal{V}$ имеет экспоненциально ограниченный рост тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ имеет экспоненциально ограниченный рост.

Список литературы

[1] А.В. Попов. Йордановы алгебры лиева типа. Мат. труды **22** (2019), no. 1, 2019, 127–177.

[2] И.П. Шестаков. Альтернативные и йордановы супералгебры. Труды X Сибирской Школы «Алгебра и Анализ». Новосибирск, ИМ СО РАН, 1997, 157–169.

Димерные модели и q-разностные уравнения Пенлеве

Д.Е. Раченков

МФТИ, Москва, Россия

rachenkov.de@phystech.edu

В работе [5] Х. Сакай показал связь обыкновенных *уравнений Пенлеве* с геометрией рациональных поверхностей, ввёл понятие *дискретного уравнения Пенлеве* и его *динамик*. В этом подходе уравнению Пенлеве соответствует подсистема корней в $E_8^{(1)}$. Группа Вейля этой подсистемы отвечает симметриям уравнения, её подгруппа трансляций задаёт дискретное уравнение Пенлеве, а элементы этой подгруппы отвечают динамикам.

Симметрии дискретных уравнений Пенлеве можно описать иным способом. Берштейн, Гавриленко и Маршаков [1] предложили описание симметрий класса дискретных уравнений Пенлеве, а именно *q-разностных*, автоморфизмами некоторых *кластерных многообразий* (см. [3]). Доклад основан на дипломной работе автора под научным руководством М. Берштейна. В работе изучаются *колчаны*, связанные с этими кластерными многообразиями.

Почти все данные колчаны могут быть получены из *допустимых димерных моделей* (см. [4]). Автором исследуется связь q-разностных уравнений Пенлеве и димерных моделей и доказывается