Расстановки ладей в системах корней G_2 и F_4 и коприсоединённые орбиты

М.А. Сурков

Самарский университет, Самара, Россия

victorsumaev@yandex.ru

Пусть N — нильпотентная комплексная группа Ли, $\mathfrak{n}$ — её алгебра Ли, $\mathfrak{n}^*$ — двойственное пространство. Группа N действует на алгебре Ли $\mathfrak{n}$ с помощью присоединённого представления; двойственное представление в пространстве $\mathfrak{n}^*$ называется *коприсоединённым*. Согласно методу орбит А.А. Кириллова, орбиты коприсоединённого представления играют ключевую роль в теории представлений группы N [6].

Нас будет интересовать случай, когда N — унипотентный радикал борелевской подгруппы B простой комплексной алгебраической группы G. Полная классификация коприсоединённых орбит в $\mathfrak{n}^*$ является дикой задачей, поэтому особый интерес представляет изучение тех или иных важных классов или серий орбит. Почти все сколь-нибудь полно исследованные на сегодня орбиты относятся к так называемым орбитам, ассоциированным с расстановками ладей в системах корней.

Пусть Φ — система корней группы G, Φ^+ — множество положительных корней относительно B, $\{e_\alpha,\ \alpha \in \Phi^+\}$ — базис алгебры $\mathfrak{n}$, состоящий из корневых векторов, $\{e_\alpha^*,\ \alpha \in \Phi^+\}$ — двойственный базис пространства $\mathfrak{n}^*$. *Расстановкой ладей* называется подмножество $D \subset \Phi^+$, состоящее из корней с попарно неположительными скалярными произведениями. Для любого отображения $\xi\colon D \to \mathbb{C}^\times$ определим линейную форму $f_{D,\xi} = \sum_{\beta \in D} \xi(\beta) e_\beta^* \in \mathfrak{n}^*$; пусть $\Omega_{D,\xi} \subset \mathfrak{n}^*$ — её орбита. Мы будем говорить, что орбита $\Omega_{D,\xi}$ *ассоциирована* с расстановкой D. К примеру, в случае $\Phi = A_{n-1}$ все орбиты максимальной размерности ассоциированы с одной и той же ортогональной расстановкой ладей, называемой *каскадом Костанта.*

Назовём расстановку D *несингулярной*, если из того, что α и β лежат в D следует, что $\alpha - \beta \notin D$. Например, для $\Phi = A_{n-1}$ все расстановки являются несинуглярными.

Орбиты, ассоциированные с ортогональными расстановками ладей (в частности, с каскадами Костанта) подробно изучались в работах [2], [3], [7], [8]. В процессе изучения возникла следующая гипотеза.

Гипотеза. *Пусть D — несингулярная ортогональная расстановка ладей, ξ_1, ξ_2 — разные отображения из D в $\mathbb{C}^\times$. Тогда Ω_{D,ξ_1} и Ω_{D,ξ_2} не совпадают.*

Для $\Phi = A_{n-1}$ это следует из результатов А.Н. Панова [8]. Для остальных классических серий B_n, C_n, D_n доказательство гипотезы сводится, в сущности, к случаю A_{n-1}. В работе [6] М.В. Игнатьев и А.А. Шевченко доказали, что гипотеза верна при $\Phi = E_6$, E_7 или E_8 для некоторых (но не всех) расстановок ладей. Основной результат моего доклада звучит так.

Теорема. *Гипотеза верна для* $\Phi = G_2$ *или* F_4.

Для G_2 это несложное упражнение, а для F_4 требуется модификация аргумента из работы [6], которая, по сути, тоже сводит задачу к случаю A_{n-1}, где можно применить более сильные результаты К. Андре [1].

Доклад основан на совместной работе с М.В. Игнатьевым [4].

Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075–02–2021–1393).

Список литературы

[1] C.A.M. Andrè. Basic sums of coadjoint orbits of the unitriangular group. J. Algebra **176** (1995), 959–1000.

[2] M.V. Ignat'ev. Orthogonal subsets of classical root systems and coadjoint orbits of unipotent groups. Math. Notes **86** (2009), no. 1, 65–80, arXiv: `math.RT/0904.2841`.

[3] M.V. Ignat'ev. Orthogonal subsets of root systems and the orbit method. St. Petersburg Math. J., **22** (2011), no. 5, 777–794; arXiv: `math.RT/1007.5220`

[4] M.V. Ignatev, M.A. Surkov. Rook placements in G_2 and F_4 and associated coadjoint orbits. Communications in Math., accepted; arXiv: `math.RT/2107.03221` (2021).

[5] M.V. Ignatyev, A.A. Shevchenko. Centrally generated primitive ideals of $U(\mathfrak{n})$ for exceptional types. J. Algebra **565** (2021), 627–650, arXiv: `math.RT/1907.04219`.

[6] A.A. Kirillov. Lectures on the orbit method. Grad. Stud. in Math. **64**, AMS, 2004.

[7] B. Kostant. The cascade of orthogonal roots and the coadjoint structure of the nilradical of a Borel subgroup of a semisimple Lie group, Moscow Math. J. **12** (2012), no. 3, 605–620.

[8] A.N. Panov. Involutions in S_n and associated coadjoint orbits. J. Math. Sci. **151** (2008), 3018–3031.