Структурные теоремы с использованием функций МакКея

Г.В. Воскресенская
Самарский университет, Самара, Россия
galvosk@mail.ru

Мы используем классические обозначения теории модулярных форм, их можно найти в монографии [2]. Известна классическая структурная теорема теории модулярных форм:

$$S_k(\Gamma) = \eta^{24}(z) \cdot M_{k-12}(\Gamma),\ k \geqslant 12.$$

В 1985 году в работе [1] был получен полный список эта-произведений с мультипликативными коэффициентами целого веса. Имеется ровно 28 таких функций, их называют функциями МакКея, и знаменитая Δ-функция $\Delta(z) = \eta^{24}(z)$ является одной из них. В работе [3] было показано, что классическое точное рассечение для $S_k(\Gamma)$ замечательно обобщается на все функции МакКея. Любая из этих функций определяет точное рассечение пространства $S_k(\Gamma_0(N), \chi)$ для своего минимального уровня N. Обратно, при уровне $N \neq 3, 17, 19$ точное рассечение таких пространств возможно только функциями МакКея для соответствующих уровней. При $N = 3$ возможны две рассекающие функции в точном рассечении, одна из них — функция МакКея. При $N = 17, 19$ рассекающие функции в точном рассечении не являются даже эта-частными. Точное рассечение существует только для 29 значений уровней (для уровня 4 существует две функции МакКея). Но функция МакКея является также параболической формой для кратных уровней. В этом случае точное рассечение уже не имеет места, возникают дополнительные пространства, которые можно описать [4].

Теорема. Пусть
1) NM таково, что сравнения $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{NM}$ и $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{NM}$ не имеют решений;
2) k, l — чётные числа, $k \geqslant l + 8$;
3) $f(z)$ — функция МакКея веса l, минимального уровня N;
4)$\{g_1(z), \ldots, g_s(z)\}$ — базис ортогонального дополнения к пространству $\langle f(z) M_2(\Gamma_0(NM))\rangle$ в пространстве $S_{l+2}(\Gamma_0(NM))$.
Тогда

$$S_k(\Gamma_0(NM)) = f(z) \cdot M_{k-l}(\Gamma_0(NM)) \oplus W,$$

и базис пространства W состоит из функций $g_1(z)h(z),\ \ldots,\ g_s(z)h(z)$, где

$$h(z) = \begin{cases} E_4^{\frac{k-l-2}{4}}(z), & k \equiv l+2 \ (mod\ 4), \\ \\ E_4^{\frac{k-l-8}{4}}(z) \cdot E_6(z), & k \equiv l \ (mod\ 4). \end{cases}$$

Аналогичная теорема доказана для нечётного веса.

Список литературы

[1] D. Dummit, H. Kisilevsky, J. McKay. Multiplicative products of $\eta-$functions. Contemp. Math. **45** (1985), 89–98.

[2] K. Ono. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series. CBMS Reg. Conf. Ser. Math. **102**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[3] Г.В. Воскресенская. Точное рассечение в пространствах параболических форм с характерами. Мат. заметки **103** (2018), no. 6, 818–830.

[4] Г.В. Воскресенская. Функции Маккея в пространствах высших уровней. Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия **24** (2018), no. 4, 13–18.

О полных системах функций в биинволюции на алгебрах Ли

А.А. Гаража

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

garazha.alex.andr@gmail.com

Доклад частично основан на работе [2].

На всякой редуктивной комплексной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ определена каноническая пуассонова структура $\{\varphi, \psi\}(x) = (x, [d_x\varphi, d_x\psi])$, где φ и ψ — гладкие функции на $\mathfrak{g}$, а $d_x\varphi$ и $d_x\psi$ рассматриваются как элементы алгебры $\mathfrak{g}$, отождествлённой с $\mathfrak{g}^*$ при помощи инвариантного скалярного умножения. Кроме того, для каждого $a \in \mathfrak{g}$ определена пуассонова структура «с замороженным аргументом»: $\{\varphi, \psi\}_a(x) = (a, [d_x\varphi, d_x\psi])$.

В [1] описан подход, позволяющий работать с пуассоновыми структурами на языке линейной алгебры. Скобки Пуассона $\{\ ,\ \}_a$ и $\{\ ,\ \}$ рассматриваются как кососимметрические билинейные формы f_a и f_x над полем $\mathbb{K} = \mathbb{C}(\mathfrak{g})$ на пространстве $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}$ рациональных векторных полей на $\mathfrak{g}$, где элемент a фиксирован, а x — общий элемент. А именно, если φ и ψ являются многочленами,