

И. Дорощко С.М. Явление самосинхронизации и вибрация газотурбинного двигателя //XXI Всесоюзное научное совещание по проблемам прочности двигателей: Тез. док. М.: АН СССР, 1986.

УДК 539.3:519.6

В.Г.Кинелев, О.Е.Селенская

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ТРУБЧАТОЙ КОНСТРУКЦИИ

Выполнен оптимизационный расчет параметров поперечного сечения трубчатой конструкции по минимуму массы при ограничениях, наложенных на размеры сечения и на значение собственной частоты колебаний конструкции. Разработан пакет прикладных программ, позволяющий осуществить оптимизацию конструкции со сложными граничными условиями.

Трубчатые конструкции находят широкое применение в системах гидро- и пневмоавтоматики. Возрастающие требования надежности работы этих систем ставят различные проблемы оптимизации параметров трубчатых конструкций.

Рассматривается задача определения проектных параметров трубчатой конструкции, минимизирующих ее массу при ограничениях, наложенных на значение нижней частоты ее собственных колебаний и на величины внешнего и внутреннего диаметров поперечного сечения.

Решение проблемы собственных значений конструкции выполнено с использованием метода конечных элементов. При формировании матриц жесткости и масс конструкции использована пространственная стержневая расчетная схема с конечными элементами в виде прямолинейного стержня, работающего на растяжение-сжатие, изгиб и кручение.

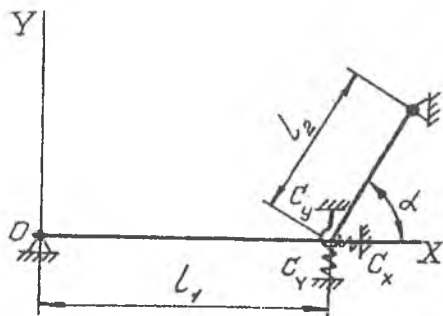
Рассматриваемые трубчатые конструкции имеют участки различной протяженности с большим диапазоном изменения жесткостей. Это обстоятельство обуславливает выбор размеров конечных элементов при дискретизации расчетной схемы, поскольку результаты расчета собственных чисел и векторов могут иметь существенные ошибки для конструкции, элементы матрицы жесткости которой значительно отличаются. Разбиение начинается с коротких участков, при этом размеры полученных конечных элементов определяют

Динамические процессы в установках ЛА. Самара, 1994.

число элементов, на которые необходимо расчленить длинные участки трубы.

Используя значительное число конечных элементов для представления трубчатой конструкции со сложными граничными условиями, можно добиться требуемой точности решения проблемы собственных значений. Однако на число конечных элементов накладывается ряд ограничений, обусловленных возможностями используемой ЭВМ, величиной ошибок округления, возрастающих с увеличением порядка матриц жесткости и масс конструкции. Важным является учет затрат машинного времени на проведение расчета, являющегося этапом решения оптимизационной задачи и поэтому многократно повторяемого.

Приведенные выше обстоятельства вызывают необходимость предварительного анализа расчетной схемы с целью выбора наиболее простой модели, обеспечивающей достаточную степень точности расчета при регламентированном объеме потребного машинного времени.



Р и с. 1. Расчетная схема трубопровода

На рис. 1 в глобальной системе координат XOY представлена расчетная схема трубопровода, состоящего из двух прямолинейных участков различной протяженности, жестко соединенных между собой под некоторым углом. Положение объекта в пространстве определяется с помощью двух концевых шарнирных опор и одной промежуточной опоры, представленной на схеме совокупностью упругих элементов с жесткостными параметрами C_x, C_y, C_φ .

Для формирования матриц

жесткости $[K]$ и масс $[M]$ пространственной стержневой конструкции разработана специальная программа *DINAM*, ориентированная на использование ЭВМ серии СМ. Программа предусматривает компактную форму хранения элементов этих матриц: в одномерных массивах хранятся активные столбцы матриц, состоящие из элементов, располагающихся ниже граничной линии вплоть до диагональных элементов. Программа *DINAM* представляет собой совокупность головной программы, управляющей порядком прохождения расчета и компонентов, осуществляющих:

ввод исходных данных;

формирование данных об элементах;

ввод данных о граничных условиях и вычисление номеров уравнений с запоминанием;

вычисление длин столбцов матрицы жесткости конструкции;

вычисление адресов диагональных элементов в ленточной матрице жесткости конструкции по известным длинам столбцов;

формирование матриц жесткости и масс элемента в глобальной системе координат;

добавление матрицы жесткости элемента к матрице жесткости конструкции и матрицы масс элемента к матрице масс конструкции [1].

При решении обобщенной проблемы собственных значений

$$[K] \varphi = \omega^2 [M] \varphi \quad (1)$$

используется метод Якоби [2], главным преимуществом которого является относительная простота и устойчивость.

Проблема собственных значений (1) имеет ряд собственных решений

$$(\omega_1^2, \varphi_1), (\omega_2^2, \varphi_2), \dots, (\omega_i^2, \varphi_i), \dots, (\omega_n^2, \varphi_n),$$

$$\text{причем } 0 \leq \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_i^2 \leq \dots \leq \omega_n^2.$$

Вектор φ_i является вектором i -й собственной формы, ω_i - соответствующая собственная частота колебаний (рад/с), $\lambda_i = \omega_i^2 - i$ - е собственное число. Собственные векторы удовлетворяют условиям [M] и [K] ортогональности:

$$\varphi_i^T [M] \varphi_j = \begin{cases} = 1; & i=j, \\ = 0; & i \neq j. \end{cases} \quad (2)$$

$$\varphi_i^T [K] \varphi_j = \begin{cases} = \lambda_i; & i=j, \\ = 0; & i \neq j. \end{cases}$$

Матрица жесткости [K] закрепленной конструкции имеет порядок n , а матрица масс [M] конструкции имеет ленточную структуру, подобную структуре матрицы жесткости [K], и всегда положительно определена.

Решение уравнений (1) с использованием условий ортогональности (2) можно представить в виде

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = [L], \quad (3)$$

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I], \quad (4)$$

где n столбцов матрицы $[\Phi]$ являются искомыми собственными векторами и $[\Lambda] = \text{diag}(\lambda_i)$ — диагональная матрица собственных чисел, $i=1, \dots, n$.

Матрица $[\Phi]$ порядка $n \times n$, одновременно приводящая матрицы $[M]$ и $[K]$ к диагональному виду согласно (3) и (4), формируется при помощи итераций [2] как предел произведения элементарных матриц вращений $[R]$:

$$[R](i; j; \theta) = \begin{cases} 1 & \text{— } i \text{ — я строка} \\ \cos \theta \dots - \sin \theta & \text{— } j \text{ — я строка} \\ \sin \theta \dots \cos \theta & \text{— } i \text{ — я строка} \\ 1 & \text{— } j \text{ — я строка} \end{cases}$$

В классической схеме метода Якоби матрица вращений $[R]_k$ на k шаге выбирается такой, чтобы в позиции наибольшего по модулю внедиагонального элемента $g_{ij}^{(k-1)}$ ($i < j$) матрицы $[G]^{(k-1)} = [M]^{-1} [K]$, полученной на предыдущем шаге, в матрице $[G]^{(k)}$ был нуль. Элементарный шаг состоит в преобразовании

$$[G]^{(k)} = [R]_k^T [G]^{(k-1)} [R]_k.$$

Тогда последовательность $[G] = [G]^{(0)}, [G]^{(1)}, \dots, [G]^{(k)}, \dots$ стремится к диагональной матрице $[\Lambda] = \text{diag}(\lambda_i^{(k)})$, а матрица собственных векторов получается как результат накопления произведений $[\Phi] = [R]_0 [R]_1 [R]_2 \dots [R]_k$. Метод имеет квадратичную сходимость.

Для вычисления собственных значений λ_i и матрицы собственных векторов $[\Phi]$ применяется эвристическая стандартная программа *NROOT* [4], реализующая метод вращений с преградами. В этом алгоритме метода Якоби последовательно просматриваются все внедиагональные (ведущие) коэффициенты матрицы $[G]$ и выполняются следующие преобразования

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= -g_{ij}, \\ \mu &= 0.5(g_{ii} - g_{jj}), \\ \omega &= \text{sign}(\mu) \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}, \\ \sin \theta &= \frac{\omega}{\sqrt{2(1+\omega)\sqrt{1-\omega^2}}}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \cos \theta &= \sqrt{1 - \sin^2 \theta}, \\
 b &= g_{ii} \cos \theta - g_{ij} \sin \theta, \\
 g_{ij} &= g_{ii} \sin \theta + g_{ij} \cos \theta, \\
 g_{ii} &= b, \\
 b &= r_{ii} \cos \theta - r_{ij} \sin \theta, \\
 r_{ij} &= r_{ii} \sin \theta + r_{ij} \cos \theta, \\
 r_{ii} &= b, \\
 g_{ii} &= g_{ii} \cos^2 \theta + g_{jj} \sin^2 \theta - 2g_{ij} \sin \theta \cos \theta, \\
 g_{jj} &= g_{ii} \sin^2 \theta + g_{jj} \cos^2 \theta + 2g_{ij} \sin \theta \cos \theta, \\
 g_{ij} &= (g_{ii} - g_{jj}) \sin \theta \cos \theta + g_{ij} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).
 \end{aligned} \right\} (5)$$

Матрица собственных векторов $[\Phi]$ образуется в результате решения. В уравнениях (5) r_{ii}, r_{ij} — элементы матрицы $[R]$, являющейся приближением матрицы собственных векторов $[\Phi]$ после данной итерации. В качестве первого приближения матрицы $[\Phi]$ используется единичная матрица. Вычисления по приведенным выше уравнениям (5) повторяются до тех пор, пока модули всех ведущих элементов не станут меньше преграды. В дальнейшем значение преграды уменьшается и начинается новый цикл просмотров. Начальное значение преграды устанавливается следующим образом:

$$\gamma_f = \frac{\left\{ \sum_{i \leq j} 2g_{ij}^2 \right\}^{1/2}}{N},$$

где N — порядок матрицы $[G]$.

Величина преграды для m -го цикла просмотров вычисляется по формуле

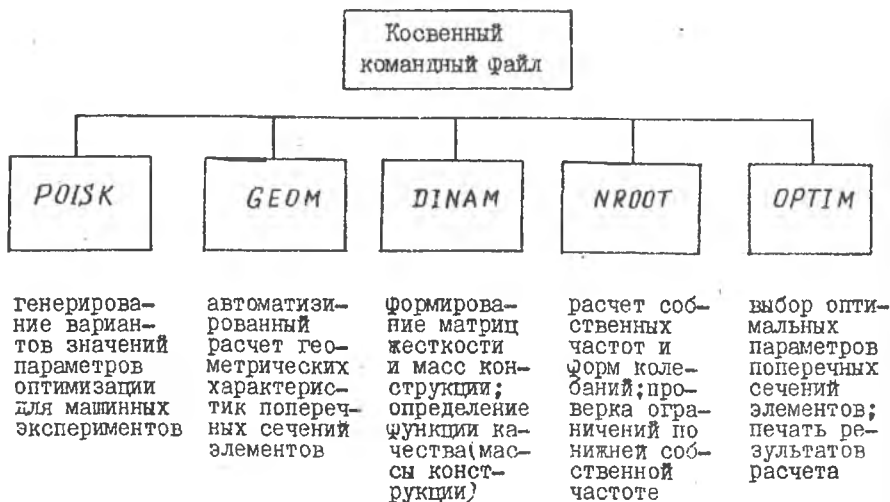
$$\gamma_m = \frac{\gamma_{m-1}}{N},$$

условие окончания счета

$$\gamma_m \leq \gamma_f, \quad \text{где} \quad \gamma_f = \frac{\gamma_f \cdot 10^{-12}}{N}.$$

Программа *NROOT* входит компонентом в разработанную нами программную систему оптимизации параметров поперечного сечения трубопровода (см. схему) и осуществляет проверку ограничения, наложенного на значение нижней частоты его собственных колебаний.

Иерархическая схема программы оптимизации параметров поперечного сечения трубопровода по минимуму массы



Необходимым этапом оптимизационного расчета является обоснование расчетной схемы при определении собственных частот и форм колебаний трубопровода (рис. 1) и возможное упрощение ее с целью уменьшения затрат машинного времени на проведение расчета.

Выполнена серия машинных экспериментов, в которых исследовалось влияние жесткостных параметров C_x, C_y, C_z упругой связи конструкции на ее низшую частоту f_1 и форму собственных колебаний (см. таблицу, рис. 1). При этом приняты следующие геометрические параметры: средний диаметр трубы $d_{cp} = 0,082$ м, толщина стенки трубы $\delta = 0,0032$ м, длина протяженного участка трубопровода $l_1 = 2$ м, длина короткого участка $l_2 = 0,3$ м, угол $\alpha = 60^\circ$; $E = 2,0 \cdot 10^{11}$ Па; $G = E/2,6$; $\rho = 7800$ кг/м³.

Анализ низших форм колебаний показывает, что амплитуды колебаний на коротком участке трубопровода в 100 раз меньше амплитуд колебаний на длинном участке.

Так, например, для основной формы колебаний ($f_1 = 82,8$ Гц) максимальная безразмерная амплитуда колебаний вдоль оси на длинном участке равна 0,033%, на коротком — $0,337 \cdot 10^{-2}$.

Влияние жесткостных параметров C_x, C_y, C_φ на
низшую собственную частоту f_1 колебаний трубопровода

№ п/п	$C_x, \text{ кН/м}$	$C_y, \text{ кН/м}$	$C_\varphi, \text{ кН/м}$	$f_1, \text{ Гц}$	Примечание
1	$0,1 \cdot 10^5$	$0,1 \cdot 10^5$	0	70,8	Полная расчетная схема трубопровода
2	$0,1 \cdot 10^7$	$0,1 \cdot 10^7$	0	82,8	
3	$0,1 \cdot 10^8$	$0,1 \cdot 10^8$	0	82,9	
4	$0,1 \cdot 10^7$	$0,1 \cdot 10^7$	0	57,5	Усеченная расчетная схема трубопровода (без короткого участка)
5	$0,1 \cdot 10^7$	$0,1 \cdot 10^7$	$0,141 \cdot 10^4$	82,8	
6	$0,1 \cdot 10^7$	$0,1 \cdot 10^7$	$0,1 \cdot 10^5$	88,6	
7	$0,1 \cdot 10^7$	$0,1 \cdot 10^7$	$0,1 \cdot 10^7$	89,8	

Данные таблицы показывают, что низшую частоту f_1 собственных колебаний трубопровода, являющуюся критерием качества при оптимизации геометрических параметров его поперечного сечения, можно определять, используя усеченную расчетную схему (без короткого участка), при этом соответствующим образом выбрав жесткостные параметры связи узла 5 с опорой. Установлено, что при следующих значениях жесткостных параметров: $C_x = 10^6 \text{ кН/м}$, $C_y = 10^6 \text{ кН/м}$, $C_\varphi = 0,141 \cdot 10^4 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (таблица, расчетный вариант 5) оптимальные параметры поперечного сечения трубопровода можно находить для конструкции без короткого участка.

При значениях параметров C_x, C_y порядка 10^6 кН/м , $C_\varphi - 10^6 \text{ кН}\cdot\text{м}$ опору узла можно считать жестким защемлением (таблица, расчетный вариант 7). Для оценки погрешности численного определения нижней частоты собственных колебаний конструкции с помощью разработанного пакета прикладных программ выполнен расчет частоты аналитическим методом [8]. В этом случае для трубопровода как для стержня с одним защемленным концом и свободно опертым другим частотное уравнение имеет вид

$$\operatorname{tg} k\ell = th k\ell, \quad (6)$$

где l - длина стержня; K - параметр, определяющий собственную частоту колебаний i -й формы,

$$f_i = \frac{\kappa_i^2}{2\pi} \sqrt{EJ / \rho F}. \quad (7)$$

Здесь EJ - жесткость стержня при изгибе, ρF - масса единицы длины стержня.

Приближенное значение корней уравнения (6) можно найти с достаточной степенью точности по формуле

$$\kappa_i l \approx (i + 1/4)\pi.$$

Так для нижней формы $\kappa_1 l = 3,927$ и для рассматриваемого расчетного варианта 7 (таблица) $f_1 = 89,9$ Гц. При этом погрешность определения частоты f численным методом меньше 0,1%.

При оптимизации геометрических параметров поперечного сечения трубопровода применен ЛП-поиск [6], позволяющий просмотреть все пространство варьируемых параметров независимо от его свойств. ЛП-поиск является детерминированным аналогом метода Монте-Карло. Датчик случайных векторов сформирован в соответствии с ЛП-последовательностью [6]. Розыгрыш оптимизируемых параметров b_{ij} осуществляется по формуле

$$b_{i,j} = b_j^* + q_{ij} (b_j^{**} - b_j^*), \quad (8)$$

где $i = 1, 2, \dots$ - номер текущего машинного эксперимента; $j = 1, 2, \dots$ - номер координаты пространства поиска (параметра b_j); q_{ij} - i -е числа Соболя [6] в j -й строке, образующие ЛП-сетку ($0 \leq q_{ij} \leq 1$); $[b_j^*, b_j^{**}]$ - область изменения параметра b_j .

В задаче оптимизации параметров поперечного сечения трубопровода по минимуму массы в качестве проектных приняты параметры: $b_1 = d_{cp}$ - средний диаметр сечения трубы; $b_2 = \delta$ - толщина стенки трубы. На проектные параметры накладываются следующие ограничения, представленные в виде неравенств:

$$\begin{aligned} \psi_1 &\equiv -b_1 \leq 0; \\ \psi_2 &\equiv -b_2 \leq 0; \\ \psi_3 &\equiv A - b_1 + b_2 \leq 0; \\ \psi_4 &\equiv -B + b_1 + b_2 \leq 0; \\ \psi_5 &\equiv F - f_1(b_1, b_2) \leq 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где A, B, F - постоянные величины ($A = 0,027$ м; $B = 0,065$ м).

Ограничения ψ_1, \dots, ψ_4 учитываются на основе анализа проектных данных выбором интервалов варьирования параметров b_1 и b_2 :

$$0,032 \leq b_1 \leq 0,06 \text{ м}; \quad 0,003 \leq b_2 \leq 0,005 \text{ м}.$$

Ограничение типа $\psi_5 \leq 0$ обеспечивается на этапе расчета нижней собственной частоты f_1 колебаний трубопровода введением штрафа: в случае нарушения ограничений $f_1 \leq F$ (в расчете принято $F = 50$ Гц) функция качества - масса конструкции - принимает достаточно большое значение и поэтому параметры b_1 и b_2 , нарушающие ограничение, в принципе не могут стать оптимальными.

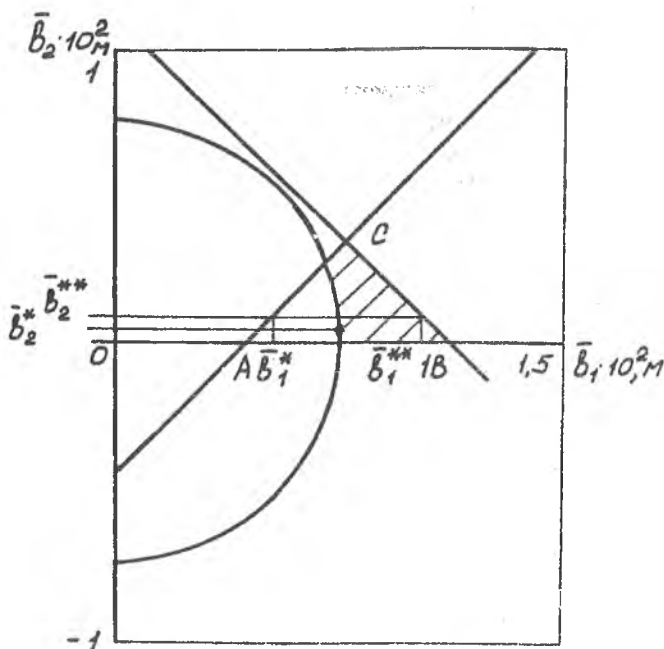
Машинные эксперименты проводились на ЭВМ СМ сериями при обеспечении рандомизированного характера обзора пространства исследуемых параметров. В каждой серии розыгрыш значений параметров проводился по формуле (8). При этом номера j -х строк таблицы чисел Соболя выбирались произвольными. Поскольку N экспериментов в серии определяет фиксированное число N_1 уровней, на которые разбивается диапазон изменения параметра b_j , то при такой методике проведения экспериментов происходит смешение N_1 уровней всех параметров между собой случайным образом. В связи с этим можно говорить о вероятности [5]

$$P = 1 - (1 - L)^N$$

нахождения лучших решений в области, составляющей L -ю часть исходного пространства поиска после проведения N экспериментов. Вероятность P для $L = 0,15$ после проведения $N = 10$ экспериментов (двумя сериями по 5 экспериментов в каждой серии) составила 0,8, что практически приемлемо, поскольку результаты проведенного расчета дают объективную и достаточно полную информацию о свойствах варьируемых параметров поперечного сечения трубопровода по отношению к критериям качества системы.

В результате ЛП-поиска получены следующие значения проектных параметров: $b_1^{opt} = 0,05$ м, $b_2^{opt} = 0,0032$ м. При этом значение функции качества составило $M = 7,8$ кг (с учетом короткого участка трубопровода - 9,0 кг), нижняя собственная частота колебаний $f_1 = 53,7$ Гц. Ограничение ψ выполняется и для полной расчетной схемы конструкции при найденных оптимальных значениях параметров b_1, b_2 . В этом случае $f_1 = 50,5$ Гц.

Двумерность пространства поиска позволяет применить для определения оптимальных значений параметров b_1, b_2 поперечного сечения трубопровода стандартный графический метод [3]. Первые четыре ограни-



Р и с. 2. Область оптимальных значений нормированных параметров \bar{b}_1 и \bar{b}_2

чения (9) выделяют на плоскости проектных параметров область в виде треугольника ABC (рис. 2, \bar{b}_1, \bar{b}_2 - нормированные), точки внутри которого удовлетворяют этим ограничениям. Ограничение ψ_5 с учетом выражения (7) может быть представлено в следующем виде:

$$r^2 \leq \bar{b}_1^2 + \bar{b}_2^2. \quad (10)$$

Здесь

$$r = 4R \frac{E}{K_2^2} \sqrt{2\rho/E}. \quad (11)$$

В выражении (11) K_1 - параметр, учитывающий граничные условия закрепления конструкции.

Так, для усеченной расчетной схемы, как для стержня с одним жестко закрепленным и другим свободно опертым концами, $K_1 = 1,9635 \text{ м}^{-1}$ и

$r = 4,55$ см. В этом случае ограничение (10) выделяет в треугольнике ABC заштрихованную область (рис. 2), точки которой удовлетворяют всем ограничениям (9). С учетом принятых интервалов варьирования проектных параметров β_1, β_2 минимуму массы будет удовлетворять точка с координатами $\beta_1 = 0,045$ м, $\beta_2 = 0,003$ м. При этом масса конструкции $M = 6,6$ кг.

Однако в случае упругой связи узла 5 конструкции с опорой при этих параметрах, естественно, ограничение ψ_5 нарушится. Поэтому при $C_x = 10^6$ кН/м, $C_y = 10^6$ кН/м, $C_\varphi = 0,141 \cdot 10^4$ кН·м в качестве оптимальных принимаем параметры, найденные с помощью ЛП-поиска.

Итак, для решения проблемы оптимизации геометрических параметров поперечного сечения трубопровода разработан пакет прикладных программ, позволяющий с достаточной степенью точности осуществлять оптимизацию конструкции со сложными граничными условиями на стадии аналитического проектирования.

Установлена возможность упрощения расчетной схемы трубопровода при выполнении оптимизационных расчетов и указаны условия, обеспечивающие требуемую их точность. При этом достигается значительное (более чем в 5 раз) снижение потребного машинного времени.

Выполнен оптимизационный расчет параметров поперечного сечения трубопровода по минимуму массы при ограничениях, наложенных на размеры сечения, и при регламентированном значении нижней собственной частоты колебаний конструкции.

Библиографический список

1. Бате К, Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов /Пер. с англ. А.С.Алексеева и др.; Под ред. А.Ф.Смирнова. М.: Стройиздат, 1982.
2. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. /Ред.совет: П.И.Челомей (пред.). М.: Машиностроение, 1978. Т. I. Колебания линейных систем /Под ред. В.В.Болотина, 1978.
3. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгделл К. Оптимизация в технике. В 2-х т. /Пер. с англ. М.: Мир, 1986.
4. Сборник научных программ на ФОРТРАНЕ. Вып. 2. Матричная алгебра и линейная алгебра /Пер. с англ. С.Я.Вилвинкина. М.: Статистика, 1974.
5. Сергеев В.И., Статников И.Н., Чернявский И.Т. К вопросу об объеме машинных экспериментов на ЭВМ в методе "ЛП-поиск" //Решение задач прикладной механики на ЭВМ. М.: Наука, 1978. С. 9-14.

6. Соболев И.М., Статников Р.Б. ЛП-поиск и задачи оптимального конструирования //Проблемы случайного поиска. Рига: Зинатне, 1972. Т. I. С. 117-135.

7. Статников И.Н. О планировании поиска оптимальных решений в задачах проектирования машин на основе ЛП-сеток //Механика машин. М.: Наука, 1977. Вып. 52. С. 116-123.

8. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. /Пер. с англ. Д.Г.Корнейчука; Под ред. Э.И.Григолока. М.: Машиностроение, 1985.

УДК 539.3:519.6

В.Г.Кинелев, В.Д.Сулимов

ОПТИМИЗАЦИЯ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ ПО НЕСКОЛЬКИМ КРИТЕРИЯМ ВАРЬИРОВАНИЕМ ФОРМЫ ЕЕ ОСЕВОЙ ЛИНИИ

Для упругой стержневой системы, нагружаемой вследствие взаимного статического смещения ее опор, ищется такая форма осевой линии, при которой низшая собственная частота колебаний системы максимальна, напряжения в заданных сечениях минимальны и одновременно удовлетворяются ограничения на перемещения системы. Методика оптимизации стержневой системы, включающая в себя анализ чувствительности при проектировании, реализована в виде комплекса прикладных программ.

К числу наиболее ответственных звеньев проектируемых летательных аппаратов относятся трубопроводы пневмогидравлических систем [1]. Типичная конструкция, относящаяся к этому классу, может быть представлена как стержневая система сложной конфигурации, закрепленная с помощью упругих опор и подвергающаяся нагружению, например, вследствие взаимного относительного смещения их оснований. Для описания конструкции используются переменные проектирования [2], в качестве которых обычно выбираются геометрические характеристики поперечных сечений стержневых элементов, координаты опор и компенсаторов, их жесткостные характеристики. Поведение конструкции, в том числе ее реакция на нагружение, описывается с помощью переменных состояния [2]. Кри-

Динамические процессы в установках ЛА. Самара, 1994.
