В сб.: Аэродинамика, динамика полета и системы управления. – Куйбышев: КуАИ, 1972.
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973.
6. Назарчук М.М., Ковецкая М.М., Панченко В.Н. Обратный переход турбулентного течения в ламинарное. – Киев: Наукова думка, 1974.
7. Методы расчета турбулентного пограничного слоя / Гиневский А.С. Иоселевич В.А., Колесников А.В. и др. – Механика жидкости и газа. – М.: ВИНИТИ, 1978, т. II.
8. Вулис Л.А., Кашкаров В.П. Теория струй вязкой жидкости. – М.: Наука, 1965.
9. Hrucak P., Levy M.J. Critical Reynolds number estimates by thermo-dynamic(stochastic) methods. Trans. ASME, 1974, №3.
10. Гиневский А.С. Теория турбулентных струй и следов. – М.: Машиностроение, 1969.

УДК 532.517.4.

В.М. Головин

КРИТИЧЕСКОЕ ЧИСЛО РЕЙНОЛЬДСА И СОПРОТИВЛЕНИЕ ГЛАДКИХ ТРУБ ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ ДВИЖЕНИИ

Условные обозначения

U – осредненная по времени скорость жидкости;
U_0 – максимальная скорость на оси;
W – средняя по объемному расходу скорость;
$q = W/u_0$ – удельный расход;
ρ, μ – плотность и вязкость жидкости;
ν – кинематическая вязкость;
μ_t – турбулентная вязкость;
$m = \mu_t/\mu$ – безразмерная турбулентная вязкость;
τ_w – касательное напряжение на стенке;
$V_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$ – динамическая скорость;
r_0 – радиус трубы;
d – диаметр;
r – текущий радиус;
y – расстояние от стенки;
$\xi = r/r_0$ – безразмерное расстояние от оси;

$\xi = y/r_0$ – безразмерное расстояние от стенки;
$\eta = \frac{V_* y}{\nu}$ – универсальная переменная;
λ – коэффициент сопротивления трения;
λ_ν , λ_t – вязкая и турбулентная составляющие;
$Re = \frac{Wd}{\nu}$ – число Рейнольдса;
$Re_{кр1}$ – число Рейнольдса начала разрушения ламинарного режима;
$Re_{кр2}$ – число Рейнольдса начала турбулентного режима;
$Re_{кр3}$ – число Рейнольдса обратного перехода;
R – локальное число Рейнольдса;
$\bar{\lambda}$ – локальный коэффициент сопротивления.

Причиной возникновения турбулентности в трубе являются начальные возмущения на входе [I] , [2] . Поэтому трудно представить себе, чтобы их уровень, показателем которого может служить критическое число Рейнольдса $Re_{кр1}$ начала разрушения ламинарного режима, не сказывался бы на величине турбулентных напряжений $\tau_{ij} = -\rho \overline{u_i' u_j'}$ $(i,j=1,2,3)$ и, в конечном счете, на величине коэффициента сопротивления λ_0. Наблюдаемый разброс экспериментальных данных по сопротивлению и распределению скоростей в трубе может быть, по-видимому, не в последнюю очередь обусловлен именно различием $Re_{кр1}$ в опытных установках и условиях эксперимента различных исследователей.

На рис. I представлены результаты сравнительно недавних (1974 г.) измерений Пэннелла, Сперроу и Эккерта [3] . Крайние справа точки в каждой серии отвечают скоростям на оси трубы. Заметны существенные отклонения их вверх от значений, предписываемых универсальным законом распределения скоростей Прандтля [4] . Указанное ветвление профиля скоростей может быть объяснено падением коэффициента сопротивления λ с ростом критического числа Рейнольдса.

В данной работе делается попытка приближенного описания турбулентного движения в трубе, содержащего единственную эмпирическую константу. Предполагается, что как распределение скоростей, так и сопротивление зависит не только от числа Рейнольдса, но и от числа $Re_{кр1}$. Ряд положений, уже использовавшихся раньше в работах [5] – [9] , получают здесь дальнейшее развитие.

Из соотношения для средней по объемному расходу скорости

$$W = 2\int_0^1 U \xi \, d\xi \tag{I}$$

при $U = U_0 f(\xi, Re)$ получаем:

$$q = W/u_0 = Q/Q_0 = 2\int_0^1 f(\xi, Re)\, \xi \, d\xi . \tag{2}$$

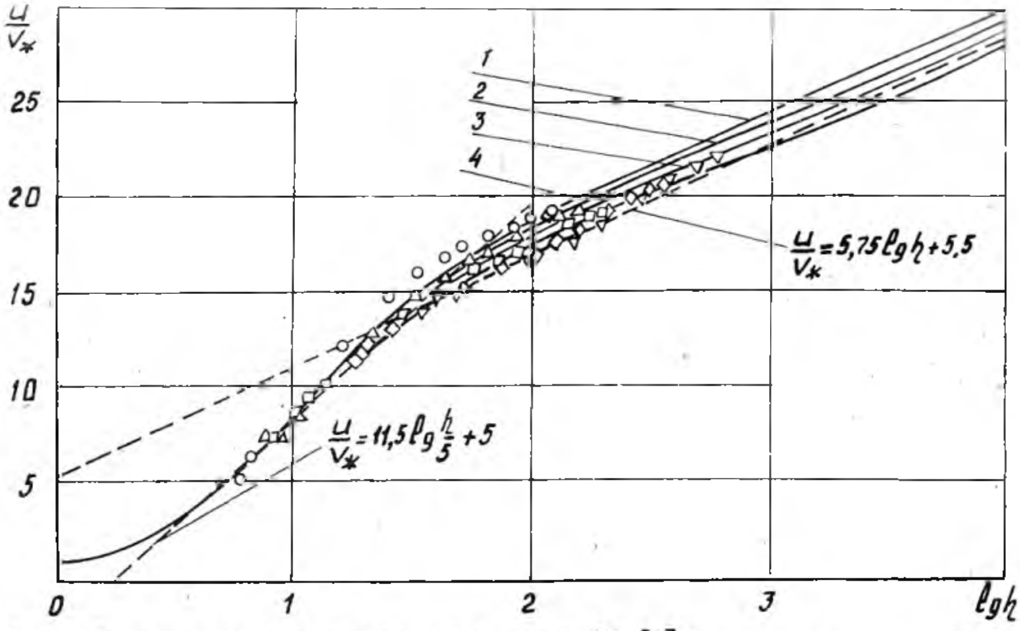

Рис. I.Распределение скоростей при малых числах Re [3] :
I. $Re_{кр1}$ = 5502; 2. $Re_{кр1}$=3500; 3. $Re_{кр1}$ =2400; 4. $Re_{кр1}$ =1800. Значение Re : ○ - 3200; △ - 3400; □ - 5850; ◊ - 11400; ▽ - 24000

Отношение $q=W/U_0$ может быть названо удельным расходом, так как оно представляет собой расход Q в реальной жидкости, отнесенный к расходу Q_0 в идеальной. Опытные данные [10] – [14] и другие показывают, что q не зависит от $Re_{кр_1}$ и является монотонной функцией числа Рейнольдса $q=q(Re)$. Но тогда и число Рейнольдса, в свою очередь, является функцией от q – $Re=\psi(q)$. Следовательно, $f(\xi, Re)$ преобразуется в функцию $\Phi(\xi,q)$:

$$f(\xi, Re)=f\left[\xi, \psi(q)\right]=\Phi(\xi, q).$$

При подстановке $\Phi(\xi,q)$ вместо $f(\xi, Re)$ соотношение (2) приводится к условию тождественности

$$2\int_0^1 \Phi(\xi,q)\xi d\xi=q, \tag{3}$$

которому должна удовлетворять любая функция, описывающая распределение скоростей в трубе [5]. Условие (3) является необходимым, но недостаточным, так как можно указать сколько угодно $\Phi(\xi,q)$ ему удовлетворяющих, но не удовлетворяющих исходному дифференциальному уравнению или краевым условиям. Примером такой функции может служить функция

$$\Phi(\xi,q)=(1-\xi^2)^{\frac{1-q}{q}}, \tag{4}$$

которая, как показано в работе [5], хорошо аппроксимирует распределение скоростей вблизи оси $(\xi=0)$ вплоть до переходной зоны, но имеет бесконечную производную на стенке при ξ =1. Из уравнения движения жидкости в трубе в форме Буссинеска [15] вытекает формула для сопротивления

$$\lambda=-\frac{16}{qRe}(1+m)\frac{1}{\xi}\frac{d\Phi}{d\xi}. \tag{5}$$

Подстановка в нее производной функции (4) при ξ =0 устанавливает структуру закона сопротивления, включающего вязкую составляющую турбулентного трения [6]:

$$\lambda=\lambda_v+\lambda_t=\frac{32}{Re}\frac{1-q}{q^2}+\frac{32}{Re}\frac{1-q}{q^2}m_0. \tag{6}$$

Таким образом, для определения λ необходимо знать законы изменения турбулентной вязкости m_0 на оси и удельного расхода q с числом Рейнольдса. Прежде чем приступить к их определению, целесообдимо рассмотреть развитие течения в трубе, а также сформулировать основные рабочие допущения. Удобнее всего это сделать в универсальных переменных

$$\eta = \frac{V_* y}{\nu} = \frac{V_* r_0}{\nu} \zeta = \frac{1}{4\sqrt{2}} Re\sqrt{\lambda}\, \zeta = \eta_0 (1-\xi), \tag{7}$$

$$\frac{U}{V_*} = \frac{U_0}{V_*} \Phi(\xi, q). \tag{8}$$

На оси при ζ =I, ξ =0 $\Phi(\xi, q)$ =I и из формул (7) и (8) находим

$$\eta\Big|_{\xi=0} = \eta_0 = \frac{V_* r_0}{\nu} = \frac{1}{4\sqrt{2}} Re\sqrt{\lambda}\ ; \tag{9}$$

$$\frac{U}{V_*}\Bigg|_{\xi=0} = \frac{U_0}{V_*} = \frac{2\sqrt{2}}{q\sqrt{\lambda}}\ . \tag{10}$$

Перемножая и деля выражения (9) и (I0), получаем:

$$2\eta_0 \frac{U_0}{V_*} = \frac{Re}{q}\ ; \tag{11}$$

$$\frac{U_0}{V_*} = \frac{16}{\lambda Re q} \eta_0\ . \tag{12}$$

Параболы $U/U_0 = 1-\xi^2$ при ламинарном движении введением универсальных переменных преобразуются в параболы

$$\frac{U}{V_*} = \eta - \frac{\eta^2}{2\eta_0}\ . \tag{13}$$

Геометрическим местом их вершин для различных чисел Рейнольдса является прямая

$$\frac{U_0}{V_*} = \frac{1}{2}\eta_0\ , \tag{14}$$

уравнение которой получается из уравнения (I2) после подстановки в него $\lambda = 64/Re$, $q = 1/2$, отвечающих ламинарному режиму. С ростом числа Рейнольдса вершины парабол (I3) скользят по прямой (I4), как изображено на рис. 2. При критическом числе Рейнольдса $Re_{кр1}$, когда $\eta_0 = \eta_{кр1} = \sqrt{2Re_{кр1}}$ ламинарный режим теряет устойчивость и критическая парабола

$$\frac{U}{V_*} = \eta - \frac{\eta^2}{2\eta_{кр1}} \tag{15}$$

через ряд переходных профилей, показанных на рис. 2 штриховыми линиями, трансформируется в начальный турбулентный профиль. (Геометрическое место вершин, осредненных по времени переходных профилей, рассчитано по данным работы [7]).

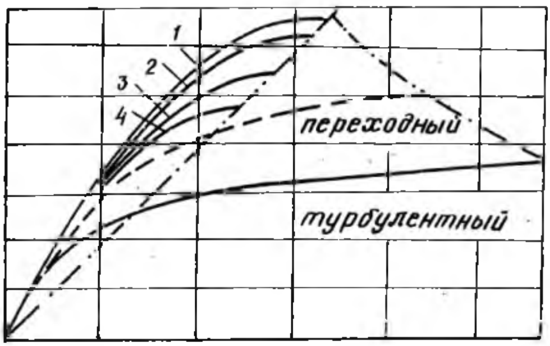

Рис. 2. Динамика развития течения в трубе:
1. $Re_{кр1}$ = 2200; 2. Re =2000; 3. Re = 1800;
4. $Re^{н}$ =1200.

Возникает вопрос о геометрическом месте вершин турбулентных профилей. На рис. 3, взятом из монографии Шлихтинга [16] , представлены результаты опытов Никурадзе [10] и Рейхардта [12] . Вертикальными черточками отмечены точки U_0/V_* , соответствующие положениям оси трубы η_0 . Как видно на рис. 2, все они для чисел $Re > 4\cdot10^3 (\eta > 150)$ лежат на кривой $U_0/V_* = \varphi(\eta_0)$,близкой к универсальному профилю скоростей $U/V_* = \varphi(\eta)$. Во всем указанном диапазоне Re отклонения лежат в пределах 1,5 – 2%. Поэтому каждая внутренняя точка η со скоростью U/V_* течения с числом Рейнольдса Re_i может рассматриваться с некоторой небольшой погрешностью, как точка η_0 на оси трубы со скоростью U_0/V_* в течении с меньшим числом Рейнольдса $Re < Re_i$. Никурадзе использовал это обстоятельство для приближенного расчета распределения скоростей при $Re > 10^5$([10] , с. 111, фиг. 48). С другой стороны, как установлено в экспериментах [3] Рейхардта [12] , Лауфера [14] и других авторов, вблизи

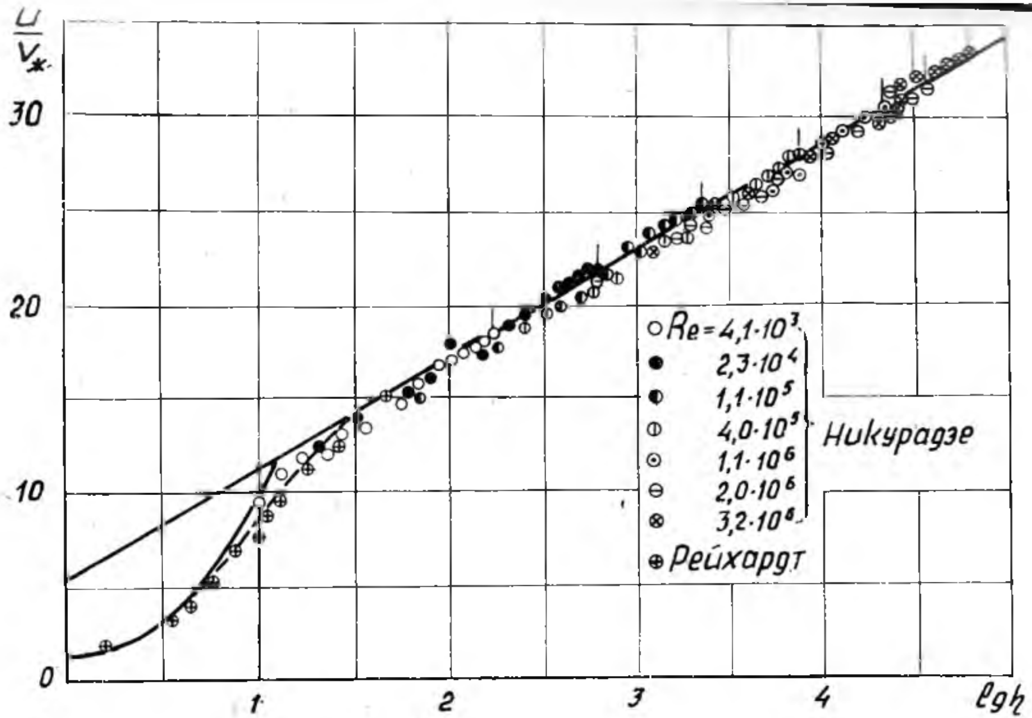

Рис. 3. Универсальный профиль распределения скоростей

стенки при $0 \geqslant \eta \leqslant 30$ все опытные точки для различных чисел Re в пределах точности измерений также ложатся практически на одну кривую. Это дает основание распространить отождествление кривых $U_0/V_* = \varphi(\eta_0)$ и $U/V_* = \varphi(\eta)$ на любые η, по крайней мере, вне пределов вязкого подслоя.

При этом первом рабочем допущении число Рейнольдса приобретает локальный смысл параметра, соответствующего некоторому расстоянию η от стенки. Во избежание недоразумений это локальное число Рейнольдса в дальнейшем будем обозначать одной буквой R.

Рассмотрим вопрос о распределении скоростей в вязком подслое при $\eta < \eta_s$. Его окончательное решение опытным путем при современной измерительной технике пока невозможно. Как видно из рис. I и как показывают расчеты, различным значениям $Re_{кр1}$ соответствуют критические параболы (I5), которые при $0 \leqslant \eta \leqslant 5$ весьма мало отличаются друг от друга.

Возникает альтернатива: либо в пределах вязкого подслоя, при постоянстве уровня начальных возмущений участок критической параболы при любых $Re > Re_{кр1}$ сохраняется, либо с изменением числа Рейнольдса профиль скоростей в подслое непрерывно меняется. В свете сказанного выше о результатах работ [3], [I2], [I4], а также работ других авторов, отмечавших постоянство распределения скоростей вблизи стенки при $0 \leqslant \eta \leqslant 30$, второе допущение данной работы о сохранении в вязком подслое распределения скоростей по критической параболе (I5) представляется вполне приемлемым.

Приступим теперь к установлению зависимостей удельного расхода q и турбулентной вязкости на оси от числа Рейнольдса. Заметим, что именно удельный расход в принципе может быть измерен с наибольшей точностью. В то же время он связан с так называемым дефицитом скорости β и сопротивлением формулой

$$\frac{1-q}{q} = \frac{\beta}{2\sqrt{2}}\sqrt{\lambda} = \omega(Re). \qquad (I6)$$

Со времени систематических опытов Никурадзе [I0] принято считать, что дефицит скорости β – величина постоянная, лежащая в пределах $3{,}75 \leqslant \beta \leqslant 4{,}I$, хотя различные исследователи приписывают ей разные значения. При этом зависимость q от числа Рейнольдса обычно представляется в форме

$$\frac{1-q}{q} = \frac{a}{Re^{b}}. \qquad (I7)$$

Так, Ф. Шевелевым [I3] предложена формула

$$\frac{1-q}{q}=\frac{0,744}{Re^{0,113}}. \qquad (I8)$$

В работе [5] дана зависимость

$$\frac{1-q}{q}=\frac{0,7}{Re^{0,11}}, \qquad (I9)$$

лучше согласующаяся с опытными данными. Если в формуле (I6) по Прандтлю [4] принять β =3,75, а коэффициент сопротивления λ по формуле Блазиуса [I7]

$$\lambda=\frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}}, \qquad (20)$$

то получится

$$\frac{1-q}{q}=\frac{0,746}{Re^{0,125}}, \qquad (2I)$$

что достаточно близко к формуле (I8). Если же взять β = 4,07, как это было найдено Никурадзе [I0]; то вместо (2I) приходим к формуле

$$\frac{1-q}{q}=\frac{0,81}{Re^{0,125}}.$$

Формула Г.Омбека [I8] при β = 4,07 приводит к выражению

$$\frac{1-q}{q}=\frac{0,708}{Re^{0,112}},$$

очень точно согласующимся с формулой (I9). Этот ряд примеров можно было бы и продолжить.

Некоторая неопределенность в значениях дефицита скорости дает основание согласиться с утверждением Ф.Шевелева [I3] об изменении β с числом Рейнольдса, а близость константы в числителях всех приведенных формул к значениям q, и сама форма структуры (6) позволяет предположить, что более содержательной с методологической точки зрения является зависимость

$$\frac{1-q}{q^2}=\frac{1}{Re^{d}}. \qquad (22)$$

Опытные данные определяют значение d = 0,I25.

Следует, однако, заметить, что ни формула типа (I7), ни формула (22) не могут быть признаны удовлетворительными, так как приводят к бесконечному значению производной $q'(Re)/_{Re=0}=\infty$ при Re = 0. С другой стороны, все они дают величину q = I/2, отвечающую ламинарному режиму при различных, очень малых значениях Re. Так, формула Ф.Шевелева (I8) дает q =I/2 при Re =0,073, формулы (I9) и (22) при Re = 0,0039. С позиций феноменологического подхода трудно понять, чем могут быть физически обусловлены приведенные отличные от нуля значения. В свете сказанного выше о локальном смысле числа Рейнольдса логичней предположить, что q =1/2 при Re =0. Тогда, вводя вместо Re "эффективное" число $Re_э = Re + 1/256$, получаем:

$$\frac{1-q}{q^2} = \frac{1}{Re_э^{\,d}} \tag{23}$$

и бесконечность производной при Re =0 устраняется.

Расчеты показывают, что значения q , вычисленные по формулам (19) и (23) во всем диапазоне $3 \cdot 10^3 < Re < 5 \cdot 10^6$ расходятся не более чем на 0,35%.

В отношении турбулентной вязкости m_0 на оси трубы при φ =0 из-за отсутствия пока прямых данных могут быть сделаны лишь различные более или менее правдоподобные предположения. Из физических соображений очевидно, что с ростом числа Рейнольдса она должна расти. Не исключено, что она может асимптотически стремиться к некоторому пределу $m_0(\infty)$. Наконец, возможно, что, достигая максимума при некотором числе Рейнольдса, она затем, убывая, стремится к конечному пределу. Структура (6) подсказывает, что в первом приближении может быть взята зависимость вида $m_0 = C Re_q^{-k}$.
Тогда расчетные формулы приобретают окончательный вид

$$\frac{U_0}{V_*} = \frac{2\sqrt{2}}{q\sqrt{\bar{\lambda}}}\,; \tag{24}$$

$$\eta_0 = R\sqrt{\bar{\lambda}}\,/\,4\sqrt{2}\,; \tag{25}$$

$$2\eta_0 \frac{U_0}{V_*} = \frac{R}{q}\,; \tag{26}$$

$$\bar{\lambda} = \frac{32}{R} \frac{1}{R_э^{0,125}} \left(1 + CR\,q^{-k}\right); \tag{27}$$

$$\frac{1-q}{q^2} = \frac{1}{R_э^{0,125}}\,. \tag{28}$$

Коэффициенты C и k могут быть найдены аналитически.

Предполагая, что профиль скоростей $U_0/V_* = \varphi(\eta_0)$, параметрически задаваемый уравнениями (24) и (25), на границе вязкого под-

...ли η_s касается критической параболы (I5), получаем два уравнения для однозначного при заданном η_s определения c и k:

$$\frac{U}{V_*}\bigg|_{\eta=\eta_s} \equiv \eta_s - \frac{\eta_s^2}{2\eta_{кр1}} = \frac{U_0}{V_*}\bigg|_{\eta_0=\eta_s} = \frac{2\sqrt{2}}{q\sqrt{\lambda}},$$

$$\frac{d}{d\eta}\left(\frac{U}{V_*}\right)\bigg|_{\eta=\eta_s} \equiv 1 - \frac{\eta_s}{\eta_{кр1}} = \frac{d}{d\eta_0}\left(\frac{U_0}{V_*}\right)\bigg|_{\eta_0=\eta_s} = \frac{U_0/V_*}{\eta_0}\,\frac{qR\frac{d}{dR}\left(\frac{1}{q}\right) - \frac{R}{2\lambda}\frac{d\lambda}{dR}}{1+\frac{R}{2\lambda}\frac{d\lambda}{dR}}\bigg|,$$

в которых R_s и q_s находятся из уравнения (26). При этом должно быть удовлетворено условие тождественности (3), которое в универсальных переменных имеет вид

$$Re_i/4 = \int_0^{\eta_i} \frac{U}{V_*}\left(1 - \frac{\eta}{\eta_i}\right) d\eta \tag{29}$$

и с учетом принятого допущения о возможности замены U/V_* на U_0/V_*, η на η_0 может быть переписано в форме

$$Re_i/4 - \int_0^{\eta_s} \frac{U}{V_*}\left(1 - \frac{\eta}{\eta_i}\right) d\eta - \int_{\eta_s}^{\eta_i} \frac{U_0}{V_*}\left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_i}\right) d\eta_0 = 0. \tag{30}$$

Так как при фиксированном $Re_{кр1}$ для каждого η_s константы c и k определяются однозначно, оба интеграла в условии (30) являются функциями η_s и задача сводится к решению уравнения

$$Re_i/4 - J_1(\eta_s) - J_2(\eta_s) = 0 \tag{31}$$

с заданной точностью [8]:

$$J_1(\eta_s) = \int_0^{\eta_s} \left(\eta - \frac{\eta^2}{2\eta_{кр1}}\right)\left(1 - \frac{\eta}{\eta_i}\right) d\eta;$$

$$J_2(\eta_s) = \int_{\eta_s}^{\eta_i} \frac{U_0}{V_*}\left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_i}\right) d\eta_0.$$

При этом различным значениям верхнего предела интегрирования

$$\eta_i = R_i\sqrt{\lambda_i}/4\sqrt{2} = Re_i\sqrt{\lambda_i}/4\sqrt{2},$$

отвечающего оси трубы, соответствуют различные пары значений c и k, а следовательно, различные возможные распределения скоростей в трубе, определяемые параметрическими соотношениями (24) и (25). В действительности же реализуется лишь одно при некотором η_i.

Для отыскания указанного значения η_i воспользуемся сформулированным Гельмгольцем [I9] принципом минимума диссипируемой энергии, справедливого для всякого ламинарного стационарного движения, допускающего отбрасывание инерционных членов в уравнениях Навье-Стокса. Но при движении в трубе на достаточном удалении от входа инерционные члены пренебрежимо малы как в ламинарном, так и квазистационарном турбулентном движении. Таким образом, главное требование принципа Гельмгольца удовлетворяется. Поэтому, хотя применимость его в этом случае строго не доказана, попытка его использования при сопоставлении результатов с опытом вполне оправдана. Впервые это было сделано, по-видимому, в работе [20] применительно к течению в плоском канале с параллельными стенками. Соответствующая вариационная задача была решена, исходя из определенного вида связи между скоростью диссипации и рейнольдсовыми напряжениями, что привело в итоге к формуле Прандтля для турбулентных напряжений, выраженных через длину пути смешения. Для согласования с экспериментальными данными потребовалось подбирать как сами функции длины перемешивания, так и числовые значения входящих в них констант. Развиваемый здесь метод свободен от этого недостатка.

Удельная мощность диссипации, равная отношению мощности, диссипируемой в трубе на длине, равной диаметру, к мощности, проносимой через поперечное сечение, определяется интегралом

$$D=\frac{\lambda_i\sqrt{\lambda_i}}{2\sqrt{2}}\int_0^{\eta_i}(1+m)\left[\frac{d}{d\eta}\left(\frac{U}{V_*}\right)\right]^2\left(1-\frac{\eta}{\eta_i}\right)d\eta .$$

Этот интеграл может быть разбит на два:

$$D=\frac{\lambda_i\sqrt{\lambda_i}}{2\sqrt{2}}\,(D_1+D_2), \tag{32}$$

где

$$D_1=\int_0^{\eta_s}(1+m)\left[\frac{d}{d\eta}\left(\frac{U}{V_*}\right)\right]^2\left(1-\frac{\eta}{\eta_i}\right)d\eta ;$$

$$D_2=\int_{\eta_s}^{\eta_i}(1+m_0)\left[\frac{d}{d\eta_0}\left(\frac{U_0}{V_*}\right)\right]^2\left(1-\frac{\eta_0}{\eta_i}\right)d\eta_0 .$$

Так как по уравнению движения жидкости в трубе

$$(1+m)\frac{d}{d\eta}\left(\frac{U}{V_*}\right)=1-\frac{\eta}{\eta_i},$$

то первый из интегралов переписывается в виде

$$D_1 = \int_0^{\eta_s} \frac{d}{d\eta}\left(\frac{U}{V_*}\right)\left(1-\frac{\eta}{\eta_i}\right)^2 d\eta$$

и легко берется аналитически

$$D_1 = \frac{U_s}{V_*}\left(1-\frac{\eta_s}{\eta_i}\right)^2 + \frac{\eta_s^2}{\eta_i}\left[\left(1-\frac{1}{3}\,\frac{\eta_s}{\eta_{кр1}}\right) - 2\frac{\eta_s}{\eta_i}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\,\frac{\eta_s}{\eta_{кр1}}\right)\right].$$

Второй преобразуется к переменной R :

$$D_2 = \sqrt{2}\int_{R_s}^{Re_i} \frac{R_\vartheta^{0,125}}{q^2}\,\frac{\left[qR\frac{d}{dR}\left(\frac{1}{q}\right) - \frac{R}{2\bar\lambda}\,\frac{d\bar\lambda}{dR}\right]^2}{1+\frac{R}{2\bar\lambda}\,\frac{d\bar\lambda}{dR}}\left(\frac{1}{R\sqrt{\bar\lambda}} - \frac{1}{Re_i\sqrt{\bar\lambda_i}}\right)dR$$

и рассчитывается на ЭВМ.

Уравнение (31) решалось на ЭВМ БЭСМ-6 для ряда значений $Re_{кр1}$ и Re_i с точностью до $2\cdot 10^{-5}\%$ [8] . Найденные значения C и K использовались при нахождении минимума диссипативной функции (32) на машине ЕС-10-20. Так как промежуточные значения C и K при каждом $Re_{кр1}$ находились по интерполяционной формуле Лагранжа, а изменение диссипативной функции в окрестности минимума весьма плавное, точность нахождения Re_i^{min} относительно невелика и может составлять $\Delta Re_i^{min} = \pm 5\,\%$. Значения $Re_{кр1}, \eta_{кр1}$ функции D_{min} , а также соответствующие значения Re_i^{min}, η_i^{min}, $R_s, \eta_s, 32C$ и k даны в табл. I.

Значение коэффициентов C и k позволяет рассчитать коэффициент λ при различных $Re_{кр1}$ и Re , однако, использование формулы (27) для локальных значений R приводит к погрешностям, особенно существенным в области малых чисел Re . Причина кроется в том, что C и k в ней определены, исходя из допущения тождественности U/V_* и U_0/V_* которые, как указывалось, хотя и незначительно, но отличаются друг от друга. Более точные результаты получаются следующим образом.

Заметим, прежде всего, что если известен универсальный профиль скоростей $U/V_* = \varphi(\eta)$, то коэффициент сопротивления может быть найден непосредственно из условия тождественности (29).

Например, подставляя в него логарифмический профиль

$$\frac{U}{V_*} = A\ln\eta + B$$

и, выполняя интегрирование, находим:

Зак.8367

Т а б л и ц а I

Расчетные параметры течения

$Re_{кр1}$	$\eta_{кр1}$	$Re_{кр3}$	$Re_i^{min} 10^{-6}$	$\eta_i^{min} 10^{-4}$	$D_{min} 10^2$	R_s	η_s	$32c\,10^2$	K
2000	63,24	1562,64	5,90	9,97	I,38	28,74	4,66	4,I2	3,72
2400	69,28	1769,I7	5,95	9,92	I,35	29,06	4,64	4,0I	3,7I
3000	77,46	2052,78	6,0	9,86	I,32	29,40	4,69	3,9I	3,70
4000	89,44	2478,6	6,05	9,79	I,28	29,82	4,72	3,8I	3,69
5000	100	2864,6	6,10	9,75	I,25	30,I2	4,73	3,72	3,68

$$\frac{Re}{4} = \frac{A}{2} \eta_i \ln \eta_i + \frac{1}{2}\left(B - \frac{3}{2} A\right)\eta_i \, . \qquad (33)$$

Подстановка в уравнение (33) числовых значений констант $A=1/\varkappa=2{,}5$, $B=5{,}5$ и $\eta_i = Re\sqrt{\lambda}/4\sqrt{2}$ приводит к известной формуле Прандтля [21]

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2{,}035 \lg Re\sqrt{\lambda} - 0{,}91 \, . \qquad (34)$$

Поскольку в нашем случае универсальный профиль задан параметрически системой уравнений (24), (25), (27), (28), то, задаваясь верхними пределами интегрирования $\eta_i < \eta_i^{min}$ для различных $Re_{кр1}$ и производя численное интегрирование в условии (29), определяем Re, а затем по формуле

$$\lambda = 32\left(\frac{\eta_i}{Re}\right)^2$$

вычисляем значения λ, которые сведем в табл. 2. Там же для сравнения даны величины локальных $\bar{\lambda}$, а также коэффициенты сопротивления по формулам Блазиуса [20], Прандтля (34) и по трехслойной модели. Как видно из табл.2, полученные результаты при $Re_{кр1} \simeq (2.0-2.4)10^3$ хорошо согласуются с известными опытными данными Никурадзе [10], Шевелева [13] и расчетами по формулам трехслойной модели Прандтля. Так что предложение Прандтля считать за критическое число Рейнольдса $Re_{кр1}$ =2320 в гидравлических расчетах подтверждается здесь теоретически.

Возвращаясь к рис. I, можно видеть, что расчетные кривые $U_0/V_* = f(\lg \eta_0)$ для ряда критических чисел Рейнольдса $Re_{кр1}$ вполне удовлетворительно описывают результаты измерений авторов работы [3].

В заключение остановимся еще на некоторых, имеющих принципиальное значение, вопросах. Общепризнано условное разделение потока в сечении трубы на три зоны. Различают вязкий подслой при $0 \leqslant \eta \leqslant 5$, переходную зону $5 \leqslant \eta \leqslant 70$ и турбулентное ядро $70 \leqslant \eta$ [16]. Однако границы зон устанавливались, по существу, на глазок по картине расположения опытных точек на рис. 3, т.е. не вполне объективно. В качестве границы подслоя указывалось η_s = II,5; 10,47; 6,2 и т.д. За верхнюю границу переходной области принимали и η_i = 50, 60 и 70. При этом нельзя было объяснить, почему эти числа именно таковы. С позиций данной работы числовые значения границ получают четкое обоснование.

Т а б л и ц а

Коэффициенты сопротивлений

Re	$Re_{кр1}$				Расчет по формулам		
	2000		2400		(20)	(34)	трехсл. модель
	$100\bar{\lambda}$	100λ	$100\bar{\lambda}$	100λ	100λ		
$4{,}0\cdot10^3$	3,915	4,40I	3,820	4,316	3,979	4,0I	4,425
5,0	3,688	4,028	3,597	3,948	3,673	3,75	4,067
7,5	3,329	3,470	3,246	3,396	3,400	3,34	3,532
$I{,}0\cdot10^4$	3,I09	3,I5I	3,03I	3,082	3,I64	3,09	3,222
2,5	2,539	2,440	2,474	2,382	2,5I6	2,44	2,487
5,0	2,20I	2,085	2,I45	2,033	2,II6	2,08	2,096
7,5	2,03I	I,940	I,978	I,89I	I,9I2	I,90	I,9I
$I{,}0\cdot10^5$	I,9I9	I,809	I,870	I,763	I,779	I,78	I,794
2,5	I,6II	I,529	I,569	I,490		I,48	I,486
5,0	I,4I6	I,356	I,380	I,32I		I,30	I,302
7,5	I,3I5	I,267	I,28I	I,234		I,2I	I,2I0
$I{,}0\cdot10^6$	I,249	I,208	I,2I6	I,I77		I,I5	I,I50
2,5	I,06I	I,048	I,033	I,02I		0,986	0,987
5,0	0,9400	0,938	0,9I6	0,9I4		0,884	0,885

В табл. I помещены значения η_s и $\eta_{кр1}$ при различных $Re_{кр1}$. В полном соответствии с физическими представлениями с понижением уровн начальных возмущений на входе в трубу и ростом $Re_{кр1}$ толщина η_s подслоя растет от $\eta_s=4{,}66$ при $Re_{кр1}=2000$, до $\eta_s=4{,}73$ при $Re_{кр1}=500$

Величина $\eta_{кр1}=\sqrt{2Re_{кр1}}$ характеризует уровень начальных возмущений и начало разрушения ламинарного режима при переходе к турбулентности. Геометрически, как видно на рис. 2, она соответствует вершине критической параболы.

При турбулентном движении на начальные возмущения накладываются возмущения, порождаемые самой турбулентностью. Их совместное воздействие и определяет величину коэффициента сопротивления $\lambda=\lambda(Re_{кр1}, Re)$, входящего в структуру универсальной переменной $\eta_0=Re\sqrt{\lambda}/4\sqrt{2}$. Так что в указанных переменных η_0 является совокупным показателем общего уровня возмущений в турбулентном движении с естественным началом отсчета от $\eta_0=\eta_{кр1}$, а $\eta_{кр1}$, в свою очередь, может быть принято за нижнюю границу турбулентного ядра и, тем самым, за верхнюю границу переходной зоны.

Как видно из табл. I, с возрастанием $Re_{кр1}$ толщина переходной зоны, как и толщина подслоя и по той же физической причине, растет. При $Re_{кр1}$=2000 она равна $\eta_t=\eta_{кр1}$ =63,25, а при $Re_{кр1}$=5000 η_t =100. В частности, если $Re_{кр1}$=2450, то $\eta_t=\eta_{кр1}$ =70, что соответствует сложившимся представлениям.

В рамках данной концепции становится возможным ясно объяснить явление задержки обратного перехода к ламинарному режиму и определить так называемое нижнее критическое число Рейнольдса $Re_{кр3}$.

Одному и тому же значению η_0 при ламинарном и турбулентном движении из-за различия λ соответствуют разные числа Рейнольдса. Так, значению $\eta_{кр1}$=70 в ламинарном режиме отвечает Re =2450, а в турбулентном Re =1790. Если во время эксперимента уровень начальных возмущений не меняется, оставаясь постоянно действующим фактором, то при снижении числа Рейнольдса до Re =2450 соответствующее значение η_0 =90 остается пока большим, чем $\eta_{кр1}$=70 и в потоке преобладают турбулентные возмущения, движение остается устойчивым. И лишь когда при $Re_{кр3}$ =1790 η_0 станет равным $\eta_{кр1}$ =70, будет достигнут начальный уровень возмущений и произойдет возврат к ламинарному режиму. Значения $Re_{кр3}$, соответствующие различным $Re_{кр1}$, также приведены в табл. I.

Таким образом можно констатировать, что полученные результаты подтверждают непротиворечивость принятой системы допущений и построенной на их основании физической и математической моделей турбулентного движения жидкости в гладких трубах. Очевидно также, что при надлежащем выборе функции $m_0=m_0(Re, q)$ можно добиться еще лучшего соответствия с опытом.

Л и т е р а т у р а

I. O. Reynolds, on the experimental investigation of the circum stances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous and the law of resistance in parallel channels, Phil. Trans. Roy. Soc. 1883. 174.

2. Рейнольдс О. Динамическая теория движения несжимаемой вязкой жидкости и определение критерия. - В сб.: Проблемы турбулентности. - М.-Л.: ОНТИ СССР, 1936.
3. W.T. Pennell, E.M. Sparrow a. E.R.G. Eckert, Turbulence intensitu and time-mean velocity distributions in low "Reynolds number turbulent pipe flow. Int.J. Heat a.Mass Transfer", 1974, 15, N5.
4. Прандтль Л. Результаты работ последнего времени по изучению турбулентности. - В Сб.: Проблемы турбулентности. - М.-Л.: ОНТИ СССР, 1936.
5. Головин В.М., Файницкий Ю.Л. О новом профиле скоростей и законе сопротивления при турбулентном течении жидкости в гидравлически гладких трубах.- В сб.: Гидрогазодинамика.- Куйбышев: КуАИ, 1976, вып. 3.
6. Головин В.М., Сарбатова Л.Ф. К вопросу о влиянии вязкой составляющей на общее сопротивление гидравлически гладких труб при турбулентном режиме течения.- ИВУЗ. Нефть и газ, 1980, № 2.
7. Головин В.М. О возможном развитии полуэмпирических теорий турбулентных течений. ИВУЗ. Авиационная техника, 1972, № 3.
8. Головин В.М., Юмашев Л.П. Некоторые аспекты феноменологической теории турбулентного движения жидкости в гладких трубах. - Куйбышев, 198. - Рукопись представлена Куйбышевским авиационным институтом. Деп. в ВИНИТИ 7 сент. 1982, № 4778-82 Деп. 45.
9. В.М.Головин. Условие тождественности и принцип минимума диссипируемой энергии в задаче о турбулентном движении жидкости в трубах. - Куйбышев, 198. - Рукопись представлена Куйбышевским авиационным институтом. Деп. в ВИНИТИ 4 мая 1983, № 2382-83 Деп., 22.
10. Никурадзе И. Закономерности турбулентного движения жидкости в гладких трубах. - В сб.: Проблемы турбулентности.- М.-Л.: ОНТИ СССР, 1936.
11. Гуржиенко Г.А. Экспериментальное исследование установившегося турбулентного потока в прямой цилиндрической трубе.- ЦАГИ. Технические заметки, 1938, № 180.
12. H. Reichardt, Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen. ZAMM, 1951, 31.
13. Шевелев Ф.А. исследование основных гидравлических закономерностей турбулентного движения в трубах.- М.: Госстройиздат, 1953.

14. J. Laufer, The structure of turbulence in fully developed pipeflow, NACA, Report, 1954, № 1174.
15. J. Boussinesq, Théorie de l'écoulement tourbilant Mém. prés. Acad. Sci. 1877, XXIII.
16. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.- М.: Наука, 1974.
17. H. Blasius, Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibung-vorgängen in Flussigkeiten, Forsch. Arb. Ing.-Wes. 1913.
18. H. Ombeck, Druckverlust strömender Luft in geraden Zylindrischen Röhrenleitungen, Forsch. Arb. Ing.-Wes. 1914.
19. H. Helmholtz, zur Theorie stationären Ströme in reibenden Flussigkeiten, Verhand. der naturalist-med. Vereines, 30 Okt, 1868.
20. Христов Х.И. Принцип наименьшей скорости диссипации энергии и возможность его применения к турбулентному течению в плоском канале. - ДАН СССР, 1979, 245 №5.
21. Прандтль Л. Механика вязких жидкостей. - В кн.: Аэродинамика/ Под ред. В. Дюрэнд. т. Ш.-М.-Л.: Оборонгиз, 1939.

УДК 532.517.4

М.Я. Сычев

О МЕТОДАХ РАСЧЕТА СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ

Принятые обозначения:

U - осредненная по времени скорость жидкости;
W - средняя по объемному расходу скорость;
u_0 - скорость на оси трубы;
$q = \frac{W}{u_0}$ - отношение средней скорости к максимальной;
ρ - плотность жидкости;
μ - молекулярная вязкость;
μ_t - турбулентная вязкость;
ν - кинематическая вязкость;
$m = \frac{\mu_t}{\mu}$ - безразмерная турбулентная вязкость;
τ_w - напряжение трения на стенке;
$V_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ - динамическая скорость;