Литература

I. Aung W. Fully developed laminar free convection between vertical plate, heated asymmetrically. Int. J. Heat and Mass Transfer, 1972, 15, N8, 1569-1572.

УДК 532.517.2+66.015.23

Л.А. Полякова

МАССООБМЕН ПРИ ЛАМИНАРНОМ ОБТЕКАНИИ ШЕРОХОВАТОЙ СТЕНКИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Распределение скоростей, необходимое при решении задачи стационарной диффузии примеси, концентрация которой на одной из стенок постоянна, находится из решения следующей гидродинамической задачи.

Движение несжимаемой жидкости в плоском канале с шероховатой стенкой в безразмерных переменных описывается системой уравнений [I]:

$$U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{Re}\nabla^2 U;$$

$$U\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{Re}\nabla^2 V; \qquad (I)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0,$$

где y, U, V - продольная и поперечная координаты и компоненты скорости;

p - давление;

за единицу измерения длины, скорости, времени выбраны ℓ - полуширина канала;

V_{max} - максимальная скорость в канале и их отношение ℓ/V_{max}.

Число Рейнольдса $Re=V_{max}\,\ell/\nu$, где ν - кинематическая вязкость. При переходе к функции тока ψ, определяемой соотношениями

4-6925

$$U=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad V=-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{2}$$

вместо системы уравнений (I) можно записать уравнение

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla^2\psi\right)-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\nabla^2\psi\right)=\frac{1}{Re}\nabla^2\nabla^2\psi. \tag{3}$$

Граничные условия для уравнения (3) имеют форму

$$y=0,\ \frac{\partial\psi}{\partial x}=0,\ \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0,$$

$$y=h=1+\varepsilon e^{j\alpha x_1}\ \frac{\partial\psi}{\partial x}=0,\ \frac{\partial\psi}{\partial y}=0,$$

где $\lambda=2\pi/\alpha$, ε – длина волны и амплитуда шероховатостей стенки.

После замены переменных x, y переменными $x_1=x$, $\eta=y/h$ уравнение (3) при сохранении членов с I-й степенью ε приобретает вид:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\left[h^3\frac{\partial^3\psi}{\partial x_1^3}-3\eta h^2 j\alpha\varepsilon e^{j\alpha x_1}\frac{\partial^3\psi}{\partial x_1^2\partial\eta}-3\eta h^2 j^2\alpha^2\varepsilon e^{j\alpha x_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial\eta}-\right.$$

$$\left.-\eta h^2 j^3\alpha^3\varepsilon e^{j\alpha x_1}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}-2j\alpha\varepsilon e^{j\alpha x_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}+h\frac{\partial^3\psi}{\partial x_1\partial\eta^2}-\eta j\alpha\varepsilon e^{j\alpha x_1}\frac{\partial^3\psi}{\partial\eta^3}\right]-$$

$$-\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\left[h^3\frac{\partial^3\psi}{\partial x_1^2\partial\eta}-2h^2 j\alpha\varepsilon e^{j\alpha x_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial\eta}-2\eta h^2 j\alpha\varepsilon e^{j\alpha x_1}\frac{\partial^3\psi}{\partial x_1\partial\eta^2}-\right.$$

$$\left.-\eta h^2 j^2\alpha^2\varepsilon e^{j\alpha x_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}-h^2 j^2\alpha^2\varepsilon e^{j\alpha x_1}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}+h\frac{\partial^3\psi}{\partial\eta^3}\right]+$$

$$+\eta j\alpha\varepsilon e^{j\alpha x_1}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\left[h^2\frac{\partial^3\psi}{\partial x_1^2\partial\eta}-2hj\alpha\varepsilon e^{j\alpha x_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial\eta}-2\eta hj\alpha\varepsilon e^{j\alpha x_1}\frac{\partial^3\psi}{\partial x_1\partial\eta^2}-\right.$$

$$\left.-\eta hj^2\alpha^2\varepsilon e^{j\alpha x_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}-hj^2\alpha^2\varepsilon e^{j\alpha x_1}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}+\frac{\partial^3\psi}{\partial\eta^3}\right]=\frac{1}{Re}\left[h^4\frac{\partial^4\psi}{\partial x_1^4}-\right.$$

$$-4\eta h^3 j\alpha\varepsilon e^{j\alpha x_1}\frac{\partial^4\psi}{\partial x_1^3\partial\eta}-6\eta h^3 j^2\alpha^2\varepsilon e^{j\alpha x_1}\frac{\partial^3\psi}{\partial x_1^2\partial\eta}-4\eta h^3 j^3\alpha^3\varepsilon e^{j\alpha x_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial\eta}-$$

$$-\eta h^3 j^4\alpha^4\varepsilon e^{j\alpha x_1}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}+2h^2\frac{\partial^4\psi}{\partial x_1^2\partial\eta^2}-8hj\alpha\varepsilon e^{j\alpha x_1}\frac{\partial^3\psi}{\partial x_1\partial\eta^2}-4\eta hj\alpha e^{j\alpha x_1}\frac{\partial^4\psi}{\partial x_1\partial\eta^3}-$$

$$\left.-4hj^2\alpha^2\varepsilon e^{j\alpha x_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}-2\eta hj^2\alpha^2\varepsilon e^{j\alpha x_1}\frac{\partial^3\psi}{\partial\eta^3}+\frac{\partial^4\psi}{\partial\eta^4}\right].$$

Положим $\psi = \psi_0 + \varepsilon \psi_1$, тогда, выделяя члены с одинаковой степенью ε, имеем

$$\frac{\partial^4 \psi_0}{\partial \eta^4} = 0; \tag{4}$$

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial \eta}\left[\frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x_1^3} - \eta j^3 \alpha^3 e^{j\alpha x_1}\frac{\partial \psi_0}{\partial \eta} - 2j\alpha e^{j\alpha x_1}\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x_1 \partial \eta^2} - \right.$$

$$\left. - \eta j \alpha e^{j\alpha x_1}\frac{\partial^3 \psi_0}{\partial \eta^3}\right] - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}\frac{\partial^3 \psi_0}{\partial \eta^3} + \eta j\alpha e^{j\alpha x_1}\frac{\partial \psi_0}{\partial \eta}\frac{\partial^3 \psi_0}{\partial \eta^3} = \frac{1}{Re}\left[\frac{\partial^4 \psi_1}{\partial x_1^4} - \right.$$

$$- \eta j^4 \alpha^4 e^{j\alpha x_1}\frac{\partial \psi_0}{\partial \eta} + 2\frac{\partial^4 \psi_1}{\partial x_1^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial \eta^4} - 4j^2\alpha^2 e^{j\alpha x_1}\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \eta^2} - \tag{5}$$

$$\left. - 2\eta j^2 \alpha^2 e^{j\alpha x_1}\frac{\partial^3 \psi_0}{\partial \eta^3}\right].$$

Уравнение (4) определяет течение Пуазейля, для которого

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial \eta} = \eta^2 - 1; \quad \psi_0 = \frac{2}{3} - \eta + \frac{1}{3}\eta^3, \tag{6}$$

так как $\psi = 0$ при $\eta = 1$.

С учетом (6) уравнение (5) принимает вид

$$\frac{\partial^4 \psi_1}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 \psi_1}{\partial x_1^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial \eta^4} - Re(\eta^2-1)\frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x_1^3} - Re(\eta^2-1)\frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x_1 \partial \eta^2} +$$

$$+ 2Re\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} = e^{j\alpha x_1}\left\{Re(\eta^2-1)j\left[\eta\alpha^3(\eta^3-1) - 4\eta\alpha\right] + \eta\alpha^4(\eta^2-1) - \right. \tag{7}$$

$$\left. - 12\eta\alpha^2\right\}.$$

Если ψ_1 искать в виде $\psi_1 = \varphi(\eta)e^{j\alpha x_1}$, то уравнение (7) можно записать

$$\varphi'''' + \varphi''\left[-2\alpha^2 - j\alpha Re(\eta^2-1)\right] + \varphi\left\{\alpha^4 + j\left[\alpha^3 Re(\eta^2-1) + 2\alpha Re\right]\right\} =$$

$$= Re(\eta^2-1)j\left[\eta\alpha^3(\eta^2-1) - 4\eta\alpha\right] + \eta\alpha^4(\eta^2-1) - 12\eta\alpha^2 \tag{8}$$

с граничными условиями

$$\eta = 0, \ \varphi = \varphi' = 0, \ \eta = 1, \ \varphi = \varphi' = 0. \tag{9}$$

Решение уравнения (8) будем искать в виде ряда [2]:

$$\varphi = \sum_{m,n} a_{mn}\, \eta^m (1-\eta)^4.$$

Ограничиваясь случаем m = 3 и используя граничные условия (9), имеем

$$\varphi = X_1 \left(\frac{5}{2}\eta^4 - 7\eta^5 + \frac{13}{2}\eta^6 - 2\eta^7\right) + X_2 \left(\frac{1}{6}\eta^3 - \frac{4}{6}\eta^4 + \eta^5 - \frac{4}{6}\eta^6 + \frac{1}{6}\eta^7\right) + X_3 \left(-\frac{1}{6}\eta^4 + \frac{1}{2}\eta^5 - \frac{1}{2}\eta^6 + \frac{1}{6}\eta^7\right), \tag{10}$$

где $\varphi''(1) = X_1$; $\varphi'''(0) = X_2$; $\varphi'''(1) = X_3$;

$\varphi''(0) = 0$, так как вязкое трение в середине канала отсутствует.

Для нахождения коэффициентов X_i применим метод Галеркина, для чего потребуем, чтобы достигался минимум

$$\int_0^1 L\,\eta^k (1-\eta)^\ell\, d\eta, \tag{11}$$

где L – дифференциальный оператор, определяемый уравнением (8).

Соотношение (11) при $k = \ell = 0$, а также два уравнения, получаемые при подстановке приближенного решения (10) в уравнение (8) и использовании граничных условий (9), образуют линейную алгебраическую систему трех уравнений относительно действительной и мнимой частей X_i-X_{i1} и X_{i2}:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = -12\alpha^2;$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 = 0;$$

$$(a_{31} - j\,a_{32})X_1 + (a_{33} - j\,a_{34})X_2 + (-a_{33} + j\,a_{34})X_3 = -6\alpha^2 - 0{,}25\alpha^4 + j\,(0{,}166\alpha^3 Re + \alpha\, Re), \tag{12}$$

где

$a_{11} = -120 - 2\alpha^2$; $a_{12} = 4$; $a_{13} = 16$; $a_{21} = 60$;
$a_{22} = -16$; $a_{23} = -4$; $a_{31} = 0{,}0119\alpha^4$, $a_{32} = 0{,}753 \cdot 10^{-3}\alpha^3 Re$;
$a_{33} = -1 - 0{,}595 \cdot 10^{-3}\alpha^4$; $a_{34} = 0{,}397 \cdot 10^{-3}\alpha^3 Re$.

Результаты численного решения системы (I2) для коэффициента X_{11} приведены на рис.I.

Функции ψ_0 и ψ_1 можно представить в виде

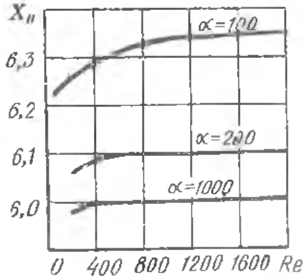
$$\psi_0 = \frac{\eta}{3}(1-\eta)^2 + \frac{2}{3}(1-\eta)^2;$$

$$\psi_1 = \left\{\frac{X_{11}}{2}\eta^3(1-\eta)^2 + \frac{9X_{11}-X_{31}}{6}\eta^4(1-\eta)^3 + \frac{X_{21}-3X_{11}}{6}\eta^3(1-\eta)^4\right\}e^{j\alpha x_1}.$$

В области, примыкающей к стенке, функцию тока и скорость можно заменить приближенно выражениями

$$\psi = (1-\eta)^2\left(1 + \frac{X_{11}\varepsilon}{2}e^{j\alpha x_1}\right);$$

$$U = -2\sqrt{\psi}\left(1 + \frac{X_{11}\varepsilon}{2}e^{j\alpha x_1}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (13)$$



Р и с. I. Зависимость коэффициента X_{11} от числа Рейнольдса

Рассмотрим уравнение стационарной диффузии примеси, концентрация которой на стенке постоянна и равна C_{cm}, а вдали от нее равна 0. Примем C_{cm} за единицу измерения концентрации, тогда имеем [3] :

$$U\frac{\partial c}{\partial x} + V\frac{\partial c}{\partial y} = \frac{1}{Pe}\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}, \qquad (I4)$$

где $Pe = V_{max}\ell/D$ – число Пекле;

D – коэффициент диффузии.

Считаем, что $\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}$.

После замены переменных x, y переменными x_1, η при использовании соотношений (2) уравнение (I4) примет вид

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial c}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial c}{\partial\eta} = \frac{1}{hPe}\frac{\partial^2 c}{\partial\eta^2}.$$

При использовании переменных x_1, ψ вместо переменных x_1, η можно записать

$$\frac{\partial c}{\partial x_1} = \frac{1}{Pe}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(u\frac{\partial c}{\partial\psi}\right).$$

Введем переменные

$$\tau = -\int\left(2\sqrt{1+\frac{X_{11}\varepsilon}{2}e^{j\alpha x_1}}/Pe\right)dx_1 .$$

В этом случае с учетом соотношения (I3) имеем

$$\frac{\partial c}{\partial \varsigma} = \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\sqrt{\psi}\,\frac{\partial c}{\partial \psi}\right). \tag{I5}$$

Используя метод подобия, решение уравнения (I5) ищем в виде зависимости от

$$z = \frac{\sqrt{\psi}}{\varsigma^{1/3}} .$$

В этом случае уравнение (I5) записывается в виде

$$\frac{d^2 c}{d z^2} + \frac{4}{3} z^2 \frac{dc}{dz} = 0 . \tag{I6}$$

Интегрирование (I6) совершается непосредственно

$$c(z) = C_1 \int_0^z exp\left(-\frac{4}{9} z^3\right) dz + C_2 .$$

Постоянные C_1 и C_2 найдем из граничных условий

$$\psi = 0, \quad c = 1, \quad \psi \to \infty, \quad c = 0 .$$

Откуда

$$C_2 = 1, \quad C_1 = -\frac{1}{\int_0^\infty exp\left(-\frac{4}{9} z^3\right) dz} .$$

Так как

$$\int_0^\infty exp\left(-\frac{4}{9} z^3\right) dz = 1{,}15,$$

то окончательно имеем

$$c = -\frac{1}{1{,}15} \int_0^z exp\left(-\frac{4}{9} z^3\right) dz + 1 .$$

Диффузионный поток на стенке в безразмерном виде определяется выражением

$$Nu = -Re\left(\frac{\partial c}{\partial \eta}\Big|_{\eta=1}\right), \tag{I7}$$

где число Нуссельта $Nu = j\ell / D c_{cm}$;

j – размерный диффузионный поток.

Если учесть, что ε – малая величина и пренебречь членами, содержащими ε^2, то соотношению (I7) можно придать вид

$$Nu = -0{,}69\left(\frac{Pe}{x_1}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\left(1 + \frac{X_{II}\,\varepsilon}{4} \cos \alpha x_1 + \frac{X_{II}\,\varepsilon}{12 \alpha x_1} \sin \alpha x_1\right)}{\left(1 + \frac{X_{II}\,\varepsilon}{6 \alpha x_1} \sin \alpha x_1\right)} . \tag{I8}$$

Уравнение (I8) справедливо в области развития диффузионного слоя при малых скоростях массообмена. В последовательных экстремальных точках поверхности отношение потоков можно представить в виде

$$\frac{Nu_{max}}{Nu_{min}} = \left(1 + \frac{X_{II}\,\varepsilon}{2}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{2 x_1}\right)^{\frac{1}{3}} . \tag{I9}$$

Из соотношения (I9) следует, что с ростом амплитуды шероховатостей отношение Nu_{max}/Nu_{min} увеличивается. Для $E=1/30$, $Re=10^2$, $\alpha=10^2$ поток около впадины меньше потока около выпуклостей поверхности в I,23 раза. С ростом числа Рейнольдса отношение Nu_{max}/Nu_{min} увеличивается, но незначительно.

В заключение выражаю благодарность В.Г. ШАХОВУ за помощь и внимание к работе.

Литература

I. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., "Наука",1974.
2. Власов В.Г. Интерполирование по начальным и конечным производным и его приложение к изучению нелинейных колебаний. Собрание трудов, т.5.Л., "Судпромгиз, I959, с.24I-350.
3. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, I959.

УДК 532.5I7.4

В.М. Головин, Ю.Л. Файницкий

О ДИССИПАТИВНОМ НАГРЕВЕ ЖИДКОСТИ ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ В ТРУБЕ

Принятые обозначения

- R – радиус трубы
- r – текущий радиус
- U – осредненная скорость турбулентного движения
- W – средняя по объемному расходу скорость
- U_m – скорость на оси трубы
- T – температура жидкости
- ρ_w, λ_w, μ_w – соответственно, плотность коэффициент теплопроводности и коэффициент вязкости жидкости при температуре стенки T_w
- Pr – число Прандтля
- Re – число Рейнольдса