существования особого управления. Следовательно, особое управление является оптимальным.

Литература

I. Кротов В.Ф., Букреев В.З., Гурман В.И. Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. М., "Машиностроение", 1969.

В.М.БУЛАТОВ

МОДЕЛИРОВАНИЕ СОУДАРЕНИЯ ЖИДКИХ ПАР

Одним из вопросов, который необходимо решать при исследовании процесса взаимодействия капли с жидкой полубесконечной мишенью, является вопрос о возможности физического моделирования соударения жидких пар.

Уравнения движения и неразрывности жидкости при соударении сферической капли с жидкой полубесконечной мишенью имеют вид [I]:

$$\frac{\partial \bar{v}_{1i}}{\partial \tau} + (\bar{v}_{1i}\, grad)\, \bar{v}_{1i} = -\frac{1}{\rho_{1i}}\, grad(p_{1i} + \rho_{1i} g z_{1i}); \quad div\, \bar{v}_{1i} = 0,$$

где i = I,2 - индекс, присваемый соответственно капле или мишени; v_{1i} - скорость; ρ_{1i} - плотность; p_{1i} - давление; z_{1i} - вертикальная координата; g - ускорение свободного падения; τ - время. Аналогичная система уравнений запишется для соударяющихся жидких пар моделируемого процесса.

Приведем дифференциальные уравнения, начальные и граничные условия к безразмерному виду с помощью следующих масштабных преобразований: V_0 - скорость соударения, d - диаметр капли, τ_0 - время образования кратера, $\rho_2 g d$ - характерное давление (прописными буквами обозначим соответствующие безразмерные масштабы).

Уравнение неразрывности в безразмерной форме не дает дополнительных условий подобия, поэтому в дальнейшем оно не рассматривается.

Уравнения движения при соударении жидкой пары в безразмерной форме примут вид:

внутри капли

$$\frac{d}{V_0 \tau_0}\, \frac{\partial \bar{V}_{11}}{\partial T} + (\bar{V}_{11}\, grad)\, \bar{V}_{11} = -\frac{\rho_{12}\, g\, d_1}{\rho_{11} V_0^2}\, grad\left(P_{11} + \frac{\rho_{11}}{\rho_{12}} Z_{11}\right); \tag{I}$$

в полубесконечной мишени

$$\frac{d}{V_0 t_0}\frac{\partial \bar{V}_{12}}{\partial T}+(\bar{V}_{12}\, grad)\bar{V}_{12}=-\frac{g d_1}{V_0^2}\, grad(P_{12}+Z_{12}). \qquad (2)$$

Начальные и граничные условия в безразмерном виде будут следующими:

I. На свободной поверхности взаимодействующих пар в точке контакта при T=0

а) начальное кинематическое условие

$$\bar{V}_{1i}=1; \qquad (3)$$

б) начальное динамическое условие постоянства давления

$$P_{11}=P_{12}=P_{10}. \qquad (4)$$

В момент касания $\tau=0$, учитывая условие (4). из уравнения Лагранжа

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \tau}+\frac{v_i^2}{2}+\frac{P_i}{\rho_i}-U_i=const, \qquad (5)$$

где φ - потенциал скорости неустановившегося движения; U - потенциал объемных сил, определяется соответственно начальное давление для капли

$$\frac{P_{10}}{\rho_{11}}=\frac{V_{10}^2}{2} \qquad (6)$$

и полубесконечного пространства

$$\frac{P_{10}}{\rho_{12}}=\frac{V_{10}^2}{2}. \qquad (7)$$

Из (6) и (7) получаем следующие выражения начального давления в точке контакта для соударяющейся пары

$$P_{10}=\frac{V_{10}^2}{g d_1}\,\frac{\rho_{11}}{(\rho_{11}+\rho_{12})}. \qquad (8)$$

2. На свободной поверхности раздела жидкости с атмосферой

$$P_{11}=P_{12}=0. \qquad (9)$$

3. На границе раздела двух сред должно выполняться:

а) кинематическое условие - равенство безразмерных скоростей для точек среды, находящихся на границе раздела двух сред

$$\bar{V}_{11}=\bar{V}_{12}; \qquad (10)$$

б) динамическое условие - равенство безразмерных давлений на границе раздела двух сред

$$\left(P_{11}+\frac{\rho_{11}}{\rho_{12}}Z_{11}\right)=\left(P_{12}+Z_{12}\right). \qquad (11)$$

4. На бесконечности мишени скорости движения частиц равны нулю

$$\bar{V}_{12\infty}=0. \qquad (12)$$

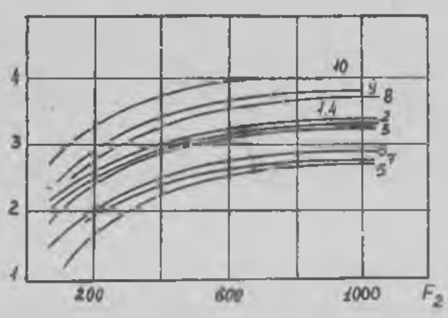
Система дифференциальных уравнений (I), (2) совместно с начальными и граничными условиями (3) - (12) однозначно описывает изучаемое явление.

Из уравнений (II) и (I2) видно, что для того, чтобы законы движения частиц при соударении жидких пар по схеме идеальной несжимаемой жидкости в геометрически подобных системах были подобны, необкодимо и достаточно осуществить следующие условия :

$$\frac{\rho_{11}}{\rho_{12}}=\frac{\rho_{21}}{\rho_{22}},\quad Fr=\frac{V_{10}^2}{gd_1}=\frac{V_{20}^2}{gd_2},\quad Sh=\frac{V_{10}\tau_{10}}{d_1}=\frac{V_{20}\tau_{20}}{d_2} \qquad (13)$$

Условия (13) являются определяющими критериями процесса соударения жидких пар.

Условия, аналогичные (13), получены при моделировании кавитационной полости, образующейся при вхождении твердого тела в жидкую среду [2] .



Р и с.1. Зависимость безразмерной глубины кратера в полубесконечных мишенях от критерия Fr для жидких соударяющихся пар: отношение плотностей $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ = 1,0 :
1 - " вода-вода", 2 - раствор сахара №9-раствор сахара № 9", 3 - " раствор $BaCl_2$ "-раствор сахара №9". 4 - " раствор сахара №9 - раствор $BaCl_2$", 5 - " глицерин - глицерин";
отношение плотностей $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ =0,79:
6 - " раствор $BaCl_2$ - четыреххлористый углерод", 7 - "раствор сахара №9 - четыреххлористый углерод";
отношение плотностей $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ = 1,26:
8 - " раствор $BaCl_2$ - вода", 9 - раствор сахара № 1 - вода", 10 - "глицерин -вода"

Выводы о возможности моделирования процесса соударения жидких пар подтверждается результатами соответствующих экспериментов. На рис. 1 представлены графики безразмерной глубины кратера в жидких полубесконечных мишенях в зависимости от критерия Фруда при различных физических свойствах жидких соударяющихся пар (табл.).

Для определения границ применения схемы идеальной жидкости были проведены эксперименты по соударению жидких пар с различной вязкостью. При сравнении результатов соударения жидких пар при одинаковых $\frac{\rho_1}{\rho_2}=const$, $\frac{V_0^2}{gd}=const$ и различной вязкости капли и мишени видно, что различие порядка 10% появляется в глубине кратера при вязкости жидкости в 5-7 раз большей, чем вязкость воды. Если этот интервал отклонений взять за допускаемый при экспериментах, то на основании полученных опытов можно сделать вывод, что вязкость соударяющихся пар начинает сказываться на геометрии кратера, когда отношение чисел Рейнольдса для капли воды и рассматриваемой вязкой жидкости удовлетворяет неравенству:

$$\frac{Re}{Re_к} \leqslant 7\ ;\quad \frac{Re}{Re_м} \leqslant 7\ ,$$

где $Re_к = \frac{\rho_1 V_0 d}{\mu_1}$ – число Рейнольдса для капли; $Re_м = \frac{\rho_2 V_0 d}{\mu_2}$ – число Рейнольдса для мишени; Re – соответствующее число Рейнольдса для воды.

При очень большой разнице в вязкости соударяемых пар при определенной скорости соударения возможны формы кратера отличные от обычной [3].

Т а б л и ц а

Физические свойства исследуемых жидкостей

Наименование жидкости	Плотность капли $\rho_i \cdot 10^3$ $кг/м^3$	Динамическая вязкость $\mu \cdot 10^{-3}$ $\frac{н\,сек}{м^2}$	Диаметр капли $d \cdot 10^{-3}$ $м$
Вода	I,0	I,05	5,II
Глицерин ГОСТ 6259-52	I,246	328	4,7
Четыреххлористый углерод	I,59	0,969	3,54
Раствор соли $BaCl_2$ в воде	I,262	I,5I	5,04
Раствор сахара в воде № I	I,34	322	4,72
Раствор сахара в воде № 9	I,26	7,I4	4,9I

Для определения радиуса кратера в зависимости от времени воспользуемся уравнением сохранения энергии в консервативной системе " капля-мишень" [4] . Форма кратера принимается полусферической

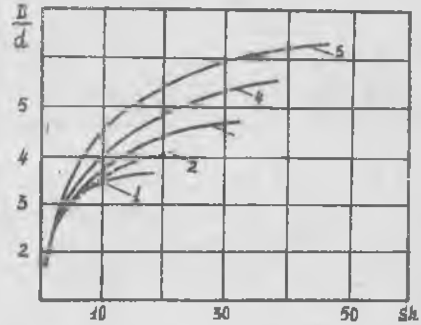
$$T_1 + T_2 + U = \frac{m V_0^2}{2}\ , \qquad (I4)$$

где $T_1 = \frac{m}{2}\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2$ -кинетическая энергия капли, масса которой не меняется в процессе образования кратера; $T_2 = \pi \rho_2 R^3 \left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2$ - кинетическая энергия жидкости мишени [5], [6]; $\mathcal{U} = \frac{\pi}{4}\rho_2 g R^4$ - потенциальная энергия кратера, равная работе сил гидростатического давления, совершаемой при его образовании.

Для начальной стадии движения в уравнении (I4) можно пренебречь значением массы капли и потенциальной энергией гидростатического давления жидкости мишени по сравнению с массой жидкости, вытесненной из кратера, и ее начальной кинетической энергией, т.е. $T_2 \gg T_1$; $T_2 \gg \mathcal{U}$ или
$$\pi\rho_2 R^3 \gg \frac{m}{2} ; \quad \left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 \gg g R .$$
Тогда уравнение (2I) примет вид
$$\pi\rho_2 R^3\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{2} m V_0^2 .$$
Интегрируя и используя начальные условия $\tau = 0,\ R = \frac{d}{2}$, имеем
$$R = \left[0{,}72\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}d^3V_0^2}\,\tau + \left(\frac{d}{2}\right)^{1/2}\right]^{2/5} \quad \text{или} \quad \frac{R}{d} = \left[0{,}72\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\,Sh + 0{,}18\right]^{2/5} \qquad (15)$$
Дифференцируя последовательно уравнение (I5), получаем зависимости скорости и ускорения поверхности кратера от времени
$$V = \frac{dR}{d\tau} = 0{,}3\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\left[0{,}72\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}d^3V_0^2}\,\tau + \left(\frac{d}{2}\right)^{5/2}\right]^{-\frac{3}{5}} \quad \text{или} \quad \frac{V}{V_0} = 0{,}82\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\left(4{,}08\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\,Sh + 1\right)^{-\frac{3}{5}}$$
$$W = \frac{d^2R}{d\tau^2} = -\frac{1}{8}\frac{\rho_1}{\rho_2}d^3V_0^2\left[0{,}72\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}d^3V_0^2}\,\tau + \left(\frac{d}{2}\right)^{5/2}\right]^{-\frac{8}{5}} \quad \text{или} \quad \frac{Wd}{2V_0^2} = -\frac{\rho_1}{\rho_2}\left(4{,}1\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\,Sh + 1\right)^{-\frac{8}{5}}.$$

В момент максимального расширения кратера скорость движения его поверхности обращается в нуль. В этом случае из уравнения (I4) можно получить конечную величину максимального радиуса
$$R_k = 0{,}76\sqrt[4]{\frac{\rho_1}{\rho_2}d^3\frac{V_0^2}{g}} \quad \text{или} \quad \frac{R_k}{d} = 0{,}76\sqrt[4]{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\,Fr^{1/4} \qquad (16)$$
Для определения времени образования кратера подставим в уравнение (I5) конечную глубину кратера (I6)
$$\tau_0 = 0{,}7\sqrt[8]{\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{d^3V_0^2}{g^3}} - 0{,}25\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}\frac{d}{V_0} .$$
или
$$Sh = \frac{V_0\tau_0}{d} = 0{,}7\sqrt[8]{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\,Fr^{5/8} - 0{,}25\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} .$$

На рис.2 приведена зависимость безразмерного диаметра кратера от числа Струхаля при соударении жидкой пары " вода- вода". Сравнение аналитической временной зависимости (I5) (пунктирная кривая) указывает на хорошее совпадение с соответствующими данными опытов на первой стадии кратерообразования, когда еще не сказываются силы тяжести.



Р и с.2. Зависимость безразмерного диаметра кратера в полубесконечной мишени при соударении жидкой пары "вода - вода" от числа Струхаля $Sh = \frac{V_0 \tau}{d}$ при различных значениях критерия Фруда $Fr = \frac{V_0^2}{gd}$:
1,2 - Fr = 78; 3 - Fr =221;
4 - Fr = 284 ; 5 - Fr =494

Литература

1. Ф о р т ь е А. Механика суспензий. М., "Мир", 1971.
2. В а л е д и н с к и й Р.А., Я к и м о в Ю.Л. Кавитационные процессы при вертикальном входе тел в воду и их моделирование.-Сб.: Избранные проблемы прикладной механики. М., АН СССР, 1974.
3. Б у л а т о в В.М. Экспериментальное исследование соударения жидких пар.-Сб.: Проектирование оптимальных конструкций. Труды КуАИ, вып. 54, 1971.
4. Б у л а т о в В.М. Частные постановки задачи о соударении капли с жидкой полубесконечной мишенью.-Сб.: Стабилизация технических систем с запаздыванием по времени. Труды КуАИ, вып.2, 1975.
5. К о у л Р. Подводные взрывы. М., " И.-Л.", 1950.
6. Л о г в и н о в и ч Г.В. Гидродинамика течений со свободными границами. Киев, " Наукова думка", 1969.

Л.И.ФЕДОСОВА

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВИХРЕЙ В U– ОБРАЗНЫХ ТРУБАХ

Образование вихрей у свободной поверхности жидкости при свободном ее колебании в U - образных трубах описано в работах [1] - [5], в которых отмечено, что вихри возникают при кинематическом числе