

УДК 533.6.011

О.Ф. Меньших

ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ
ПРОСТРАНСТВЕННОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ГАЗА

Система уравнений, описывающая пространственное нестационарное изэнтропическое движение идеального политропного газа, может быть записана в виде

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \sum_{\kappa=1}^3 U_{\kappa} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\kappa}} + \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0; \quad (i=1,2,3)$$
$$\frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{\kappa=1}^3 (U_{\kappa} \frac{\partial H}{\partial x_{\kappa}} + (\gamma-1)H \frac{\partial U_{\kappa}}{\partial x_{\kappa}}) = 0,$$

(I)

где U_i - проекции вектора скорости \vec{v} на оси декартовой системы координат x_i ;

t - время;

H - энтальпия;

γ - показатель адиабаты Пуассона.

Введем в систему (I) новые функции P_i, λ по формулам

$$U_i = \frac{x_i + P_i}{t}; \quad H = \frac{\lambda^2}{6t^2} \quad (i=1,2,3).$$

(2)

После введения новых функций в случае $\gamma = \frac{5}{3}$ получим новую систему, эквивалентную (I):

$$t \frac{\partial P_i}{\partial t} + \sum_{\kappa=1}^3 (x_{\kappa} + P_{\kappa}) \frac{\partial P_i}{\partial x_{\kappa}} + \frac{\lambda}{3} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} = 0; \quad (i=1,2,3)$$

$$t \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \sum_{\kappa=1}^3 \left\{ (x_{\kappa} + p_{\kappa}) \frac{\partial \lambda}{\partial x_{\kappa}} + \frac{\lambda}{3} \frac{\partial p_{\kappa}}{\partial x_{\kappa}} \right\} = 0. \quad (3)$$

Выведем простые волны [I] системы (3) в виде

$$p_i = p_i(\lambda) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), получим

$$t p_i' \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \sum_{\kappa=1}^3 \left\{ (x_{\kappa} + p_{\kappa}) p_i' + \delta_{i\kappa} \frac{\lambda}{3} \right\} \frac{\partial \lambda}{\partial x_{\kappa}} = 0; \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5)$$

$$t \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \sum_{\kappa=1}^3 \left\{ (x_{\kappa} + p_{\kappa}) + p_{\kappa}' \frac{\lambda}{3} \right\} \frac{\partial \lambda}{\partial x_{\kappa}} = 0;$$

$$p_{\kappa}' = \frac{d p_{\kappa}}{d \lambda} \quad (\kappa = 1, 2, 3); \quad \delta_{i\kappa} = \begin{cases} 1, & i = \kappa \\ 0, & i \neq \kappa \end{cases}.$$

Система (5) является однородной линейной системой четырех уравнений относительно $\frac{\partial \lambda}{\partial t}$, $\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}$. Приравняв нулю определитель этой системы, получим соотношение

$$(p_1')^2 + (p_2')^2 + (p_3')^2 = 1. \quad (6)$$

Общий интеграл системы (5) записывается в виде

$$\sum_{\kappa=1}^3 (p_{\kappa}' \tilde{x}_{\kappa} + p_{\kappa} p_{\kappa}') + \frac{\lambda}{3} + \psi(\lambda) t = 0, \quad (7)$$

где $\psi(\lambda)$ — произвольная функция.

Общее решение уравнения Монжа (6) известно из [I]:

$$p_1 = \int \sin \theta(\lambda) \cos \varphi(\lambda) d\lambda;$$

$$p_2 = \int \sin \theta(\lambda) \sin \varphi(\lambda) d\lambda;$$

$$p_3 = \int \cos \theta(\lambda) d\lambda. \quad (8)$$

Таким образом, найденное решение системы (I) зависит от трех произвольных функций $\psi(\lambda)$, $\theta(\lambda)$, $\varphi(\lambda)$. Если эти функции будут заданы, то уравнение (7) определит функцию $\lambda = \lambda(t, x_1, x_2, x_3)$, затем по формулам (2) и (8) определяются H и U_i .

Рассмотрим некоторые свойства найденного решения:

- а) движение газа, описываемое формулами (2), (7), (8), является потенциальным;
- б) функции H, U_1, U_2, U_3 удовлетворяют условию

$$\frac{\partial(U_1, U_2, U_3, H)}{\partial(x_1, x_2, x_3, t)} \neq 0,$$

т.о., найденное решение не принадлежит к классу простых и кратных волн;

в) полученное решение принадлежит к классу решений с дифференциальными связями [2], в данном случае связи являются конечными и определяются формулами (2), (4); данное решение является частично-инвариантным [3], оно построено на подгруппе, имеющей инварианты

$$J_k = t U_k - x_k, \quad J_4 = \sqrt{H} t, \quad (k=1, 2, 3),$$

причем, между инвариантами имеются зависимости $J_k = J_k(J_4)$, которые совпадают с дифференциальными связями;

г) в некоторой области пространства x_1, x_2, x_3 , где происходит движение газа, при $t = \text{const}$ существуют плоскости, вдоль которых энтропия (a , значит давление и плотность) принимают постоянные значения [это следует из (7)], указанные плоскости S являются одними из семейств характеристических поверхностей системы (I) (при $\gamma = \frac{5}{3}$).

Коротко остановимся на одном частном случае решения, когда плоскости S параллельны и расположены перпендикулярно оси x_1 . Тогда

$$P_2' = P_3' = 0; \quad P_1' = 1; \quad P_1 = \lambda$$

формулы (2), (7) примут вид:

$$U_1 = \frac{x_1 + \lambda}{t}; \quad U_2 = \frac{x_2}{t}; \quad U_3 = \frac{x_3}{t}; \quad H = \frac{\lambda^2}{6t^2}; \quad x_1 + \frac{4}{3}\lambda + \psi(\lambda)t = 0, \quad (9)$$

где $\psi(\lambda)$ - произвольная функция.

Формулы (9) определяют осесимметричное движение газа, причем ось симметрии является Ox_1 . После введения новых обозначений

$$x_1 = x; \quad x_2 = z; \quad x_3 = y; \quad V = \sqrt{U_2^2 + U_3^2}; \quad U_1 = U$$

формулы (9) переписутся в виде

$$U = \frac{x + \lambda}{t}; \quad V = \frac{y}{t}; \quad H = \frac{\lambda^2}{6t^2}; \quad (10)$$

$$x + \frac{4}{3}\lambda + \psi(\lambda)t = 0. \quad (11)$$

Рассмотрим следующую задачу: пусть при $t = t_0 > 0$ задана образующая гибкого осесимметричного выпуклого поршня

$$y = \Pi(x); \quad x \in [x_1, x_2]. \quad (12)$$

На функцию $\Pi(x)$ наложим условия:

$$\Pi(x_1) = \Pi(x_2) = 0, \quad \Pi(x) > 0, \quad x \in (x_1, x_2);$$

$$\Pi'(x)|_{x=x_1} = +\infty, \quad \Pi'(x)|_{x=x_2} = -\infty,$$

$$\Pi''(x) < 0, \quad x \in (x_1, x_2).$$

Из (10), (11) видно, что для определения H и U_2 внутри поршня достаточно при $t = t_0$ задать функцию

$$\lambda = \lambda(x), \quad x \in [x_1, x_2]. \quad (13)$$

Предположим, что $\lambda'(x) \neq 0$. Тогда зависимость (13) можно обратить

$$x = \Omega(\lambda), \quad (t = t_0). \quad (14)$$

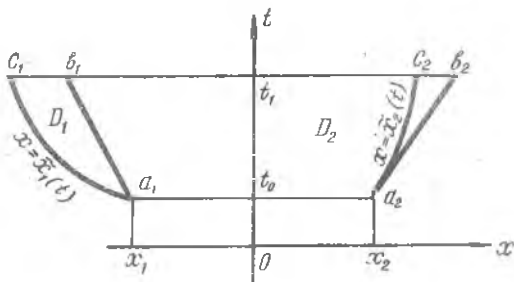
Для принятых условий требуется определить движение газа внутри гибкого поршня при $t > t_0$ и движение самого поршня при условии, что протекание газа через поршень не происходит, причем, влияние внешней среды на движение поршня не учитывается.

Ограничимся предположением, что

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad x_1 < 0, \quad x_2 > 0, \quad \Omega'(\lambda) > 0,$$

$$x_1 + \lambda_1 < 0, \quad x_1 + \frac{4}{3}\lambda_1 < 0.$$

Уравнение (11) должно определять зависимость $\lambda = \lambda(x, t)$. Будем считать $t_0 \leq t \leq t_1$, где t_1 — произвольное значение t . На плоскости xot постоянным значениям λ соответствует семейство прямых, которые являются характеристиками исходной системы (1).



Р и с. 1. Характеристики системы уравнений

При принятых предположениях крайними характеристиками будут $a_1 b_1$ и $a_2 b_2$ (рис. I). В области $a_1 b_1 b_2 a_2 a_1$ функция λ определяется однозначно по ее значению при $t = t_0$. Подставляя значения (I4) в (II) получим

$$\psi_2(\lambda) = -\frac{1}{t_0} \left[\Omega(\lambda) + \frac{4}{3} \lambda \right]. \quad (I5)$$

Из (II) с учетом (I5) следует

$$x = \Omega(\lambda) \frac{t}{t_0} + \frac{4}{3} \lambda \left(\frac{t}{t_0} - 1 \right). \quad (I6)$$

При принятых условиях $\lambda = \lambda(x, t)$ из (I6) в области $a_1 b_1 b_2 a_2 a_1$ определяется однозначно, в самом деле

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \Omega'(\lambda) \frac{t}{t_0} + \frac{4}{3} \left(\frac{t}{t_0} - 1 \right) > 0,$$

так как $t > t_0$; $\Omega'(\lambda) > 0$.

На рис. I изображены также траектории движения левого и правого концов гибкого поршня при принятых предположениях. Из (I6) видно, что угловые коэффициенты касательных к траекториям точек a_1 и a_2 гибкого поршня будут следующие:

$$\tilde{K}_1 = \frac{t_0}{x_1 + \lambda_1}; \quad \tilde{K}_2 = \frac{t_0}{x_2 + \lambda_2},$$

а наклоны левой и правой характеристик соответственно равны

$$K_1 = \frac{t_0}{x_1 + \frac{4}{3} \lambda_1}; \quad K_2 = \frac{t_0}{x_2 + \frac{4}{3} \lambda_2}.$$

Легко проверить, что

$$K_2 > \tilde{K}_2; \quad K_1 < \tilde{K}_1.$$

Нетрудно убедиться, что траектория движения правого конца поршня будет при $t > t_0$ расположена выше линии $a_2 b_2$. Поскольку траектория движения левого конца поршня в окрестности точки a_2 расположена на плоскости xot ниже линии $a_1 b_1$, то для однозначного определения $\lambda = \lambda(x, t)$ в области $a_1 c_1 c_2 d_2 d_1$ (см. рис. I) на левом конце поршня нужно задать дополнительное условие. Очевидно, что и траектория левого конца поршня должна быть задана. Предполагаем, что она не пересекает линию $a_1 b_1$ (при $t > t_0$). Дополнительное краевое условие можно задать в виде

$$x = \tilde{x}(\lambda); \quad t = \tilde{t}(\lambda), \quad (I7)$$

причем

$$\tilde{x}(\lambda_1) = x_1; \quad \tilde{t}(\lambda_1) = t_0; \quad 0 < \lambda \leq \lambda_1;$$

$$\tilde{x}'(\lambda_1) / \tilde{t}'(\lambda_1) = (x_1 + \lambda_1) / t_0.$$

Подставляя (I7) в (II), найдем ψ в области a, c, b, a_1 :

$$\psi_1 = - \left[\frac{\bar{x}(\lambda) + \frac{4}{3}\lambda}{\bar{t}(\lambda)} \right].$$

Таким образом, (см. рис. I)

$$\psi = \begin{cases} \psi_1 & \lambda \in D_1 \\ \psi_2 & \lambda \in D_2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{или} \\ \text{или} \end{array} \quad \begin{array}{l} t \leq \frac{t_0}{x + \frac{4}{3}\lambda}; \\ t > \frac{t_0}{x + \frac{4}{3}\lambda}. \end{array} \quad (\text{I8})$$

Выведем уравнение движения поверхности гибкого поршня. На его поверхности должно выполняться условие обтекания

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + U \frac{\partial \psi}{\partial x} + V \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0,$$

$\psi(t, x, y) = 0$ - уравнение образующей гибкого поршня.

Общий интеграл этого уравнения с учетом (II) и (I8) будет равен

$$\psi = \bar{\psi} \left(\frac{y}{t}, \zeta \right);$$

$$\zeta = \frac{1}{t} \left[\lambda^2 + 3t \int \lambda^3 \psi'(\lambda) d\lambda \right], \quad (\text{I9})$$

где $\bar{\psi}(\lambda)$ - произвольная функция.

Отсюда получим уравнение образующей гибкого поршня

$$y = t f(\zeta), \quad (\text{20})$$

где $f(\zeta)$ - произвольная функция.

Покажем, что при принятых условиях вид функции f однозначно определяется по функциям $\Omega(\lambda)$ и $\Pi(x)$ [см. (I4), (I2)]. В самом деле, зависимость $x = x(\zeta)$ при $t = \text{const}$ с учетом (II); (I5), (I9) может быть задана параметрически

$$x = x(\lambda, t); \quad \zeta = \zeta(\lambda, t). \quad (\text{21})$$

Отсюда получаем,

$$\frac{\partial x}{\partial \zeta} \Big|_{t=t_0} = - \frac{3\lambda^3}{t_0} \neq 0,$$

если $\lambda \neq 0$.

Значит из (21) можно найти функцию $x = x(\zeta)$. Подставим теперь (I2) в (20):

$$t_0 f(\zeta) = \Pi(x)$$

или

$$t_0 f(\zeta) = \Pi \{ x(\zeta) \}.$$

Отсюда получим

$$f(\varphi) = \frac{1}{t_0} \Pi\{x(\varphi)\}.$$

Найденная функция $f(\varphi)$ обладает следующими свойствами:

$$f(\varphi_1) = f(\varphi_2) = 0; \quad f(\varphi) > 0; \quad x \in (\varphi_1, \varphi_2);$$

$$f'(\varphi) \Big|_{\varphi=\varphi_2} = +\infty; \quad f'(\varphi) \Big|_{\varphi=\varphi_1} = -\infty,$$

где φ_1, φ_2 соответствуют движению левого и правого концов поршня.

Значению $\varphi = const$ соответствует закон движения точки на поверхности гибкого поршня, в частности, закон движения правого конца гибкого поршня можно записать в виде:

$$t = \frac{\lambda^4}{\varphi^2 - 3 \int_{\lambda_2}^{\lambda} \lambda^3 \psi_2'(a) da};$$

$$x = \frac{1}{t_0} \left\{ \Omega(\lambda) + \frac{4}{3} \lambda \int_{\lambda_1}^{\lambda} (\varphi_2 - 3 \int_{\lambda_1}^{\lambda} \lambda^3 \psi_2'(a) da) - \frac{4}{3} \lambda; \right.$$

$$\left. \varphi_1 = \frac{\lambda_1^4}{t_0}; \quad \varphi_2 = \frac{\lambda_2^4}{t_0} + 3 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \psi_2'(a) \lambda^3 da.$$

Имеет место соотношение

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{3}{t_0} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda^3 \Omega'(a) da > 0,$$

которое следует из уравнений (I9), (I5) и (II).

Таким образом, выведены все необходимые формулы, решающие поставленную задачу.

Приведем в заключении простейший пример. Пусть начальные данные будут следующие:

$$\Omega(\lambda) = 4\lambda - 6; \quad \Pi(x) = \sqrt{4-x^2};$$

$$1 \leq \lambda \leq 2; \quad -2 \leq x \leq 2; \quad t_0 = 1.$$

Краевое условие на левом конце поршня возьмем в виде

$$t = 5 - 4\lambda; \quad x = -6 + 4\lambda, \tag{22}$$

что соответствует движению левого конца поршня с постоянной скоростью.

Из (22) и (10) видно, что при $t = 5$ на левом конце поршня будет вакуум, поэтому $1 \leq t \leq 5$. В данном примере

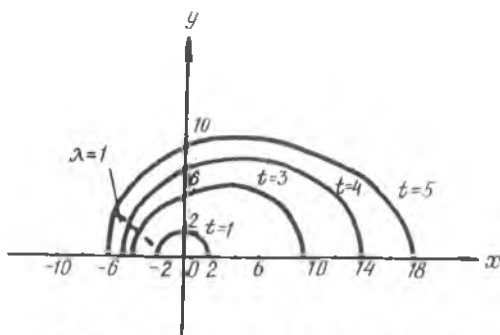
$$f(\xi) = \sqrt{4 - \left\{ 4\sqrt{\frac{4-\xi}{3}} - 6 \right\}^2};$$

$$\xi = \frac{\lambda^4}{4} + 3 \int_1^\lambda \psi'(\alpha) \alpha^3 d\alpha;$$

$$\psi(\alpha) = \begin{cases} \psi_1 = \frac{2}{3} \left(2 + \frac{1}{4\alpha - 5} \right), & \alpha < 1 \\ \psi_2 = 6 - \frac{16}{3} \alpha, & \alpha > 1; \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{3}{4} \frac{X + 6t}{4t - 1}; \quad \lambda \in D_2.$$

Здесь все вычисления доводятся до конца. На рис. 2 приведены положения гибкого поршня в различные моменты времени.



Р и с. 2. Изменение формы гибкого поршня

Л и т е р а т у р а

1. Я н е н к о Н.Н. Бегущие волны системы квазилинейных уравнений. ДАН СССР, 1965, т.109, № 3.
2. Я н е н к о Н.Н. Исследование совместности и методы интегрирования систем нелинейных дифференциальных уравнений, Труды 4-го Всес. матем. съезда, т. 2. Л., 1964.
3. О в с я н и к о в Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Из-во СОАН СССР, Новосибирск, 1962.

УДК 532.546

Л.И. М о г и л е в и ч

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Исследуем плоскорадиальную фильтрацию сжимаемой жидкости, истекающей из скважины в пористый неизменяемый пласт мощности H . Линейный закон сопротивления Дарси справедлив здесь только до определенной скорости фильтрации v_* , называемой критической. При скорости фильтрации v , выше критической, закон Дарси нарушается, при этом в пласте одновременно действуют два закона сопротивления — линейный и нелинейный.

Фильтрация жидкости в трещиновато-пористом пласте исследована в [1].

Рассмотрим случай сверхкритической скорости фильтрации на скважине ($v_c > v_*$). Вблизи скважины радиуса r_c образуется зона с нелинейным законом сопротивления Смрекера [2]:

$$Re = G\Omega^{1/3}; Re = \rho |v| k^{1/2} \mu^{-1}; \Omega = \rho k^{3/2} |g \alpha d p| \mu^{-2}. \quad (1)$$

Начиная с некоторого радиуса $r_1 = r_c R$, на котором достигается критическая скорость фильтрации, $v = v_c = const$ и до контура питания $r_k = r_c R_k$ имеется зона с докритической скоростью фильтрации и с линейным законом сопротивления Дарси [2]:

$$Re = \Omega, r_1 = r_c R \ll r \ll r_c R_k = r_k, \quad (2)$$

где Re — число Рейнольдса;

Ω — число фильтрации;