

плазменной струи, совмещенной со столбом электрической дуги. Материалы научно-технической конференции КуАИ, 1972.

10. Жуковский А.Е., Мильштейн И.И., Пинес В.Н. Особенности применения первичных преобразователей давления в условиях повышенных вибраций. "Измерительная техника". № 10, 1969.
11. Жидович А.И., Ясько О.И. Некоторые вопросы обобщения вольт-амперных характеристик обдуваемых электрических дуг. ИФЖ, том XVI, № 3, 1969.
12. Даутов Г.Ю., Жуков М.Ф. Критериальное обобщение характеристик плазмотронов вихревой схемы. ПМТФ, № 6, 1965.

В.Я. Давыдов, Г.В. Филиппов

О РАВНОВЕСИИ ГАЗОЖИДКОСТНЫХ СИСТЕМ В СЛАБЫХ СИЛОВЫХ ПОЛЯХ

Одной из основных задач механики жидкости в слабых гравитационных полях является задача об определении равновесных форм. Общая задача - установление формы границы раздела жидкость - газ с учетом сил поверхностного натяжения - была поставлена в прошлом веке в связи с исследованием капиллярных явлений. Первоначально были определены форма мениска в капилляре, форма капли. Ряд работ о равновесных формах двухфазных сред в замкнутом объеме, подверженных действию капиллярных и гравитационных сил, был опубликован в последнее десятилетие советскими [1,2,3,4 и др.] и зарубежными [5,6,7 и др.] учеными.

Ниже в общем виде сформулирована задача о равновесии жидкости в том случае, когда кроме указанных выше сил действует поверхностная сила на границу раздела. Получено в конечном виде решение простейшей плоской задачи о равновесной форме поверхности при действии капиллярных сил и плоского однородного силового поля, обуславливающего возникновение поверхностной силы, пропорциональной квадрату косинуса между силовыми линиями и поверхностью раздела.

1. Уравнения равновесия. Рассмотрим сосуд, неподвижный относительно системы координат, движущийся с малой осевой перегруз-

кой Π , в котором содержится жидкость и газ. Массой последнего пренебрегаем. Если p_0 - постоянное давление газа, γ - краевой угол между свободной поверхностью Σ и твердой стенкой сосуда S (причем $0 \leq \gamma \leq \pi/2$ (рис.1), то форма свободной поверхности $z = \xi(x, y)$, как показано в работе [3], определяется уравнением

$$C_1 + \rho n g \xi = \sigma \frac{\xi_{xx}(1+\xi_y^2) - 2\xi_x \xi_y \xi_{xy} + \xi_{yy}(1+\xi_x^2)}{(1+\xi_x^2 + \xi_y^2)^{3/2}} \delta \Sigma_0, \quad (1)$$

краевым условием

$$\frac{n_x \xi_x + n_y \xi_y - n_z}{(1+\xi_x^2 + \xi_y^2)^{1/2}} = \cos \gamma \text{ на } \Gamma_0 \quad (2)$$

и условием равенства объемов. Здесь Σ_0 - проекция свободной поверхности Σ на плоскость xOy ; Γ_0 - граница области Σ_0 ;

n_x, n_y, n_z - компоненты внутренней нормали к поверхности S . Постоянная C_1 определяется в процессе решения задачи.

Введем теперь в жидкость поле поверхностных сил. Константа поля - E . На единицу поверхности раздела действует сила

$$F_e = E \cos \alpha, \quad (3)$$

всегда направленная в сторону газа, (α - угол между нормалью к поверхности S и осью Ox). Тогда уравнение (1) примет вид

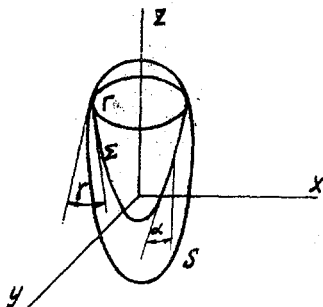


Рис.1. Расчетная схема

$$C_1 + \rho n g \xi = \sigma \frac{\xi_{xx}(1+\xi_y^2) - 2\xi_x \xi_y \xi_{xy} + \xi_{yy}(1+\xi_x^2)}{(1+\xi_x^2 + \xi_y^2)^{3/2}} + \frac{E}{1+\xi_x^2 + \xi_y^2} \delta \Sigma_0 \quad (4)$$

Граничное условие (2) остается неизменным.

В общем случае сформулированная задача равновесия жидкости под действием сил тяжести, поверхностного натяжения и поверхностного давления является сложной нелинейной краевой задачей.

2. О равновесии невесомой жидкости в плоском канале при воздействии поля поверхностных сил. В случае невесомости ($n = 0$)

из уравнения равновесия выпадает член, содержащий ξ и неизвестная функция сохраняется только в форме производных. При постоянной ширине канала $n_y = n_z = 0$, $|n_x| = 1$; $\xi_y = 0$, следовательно, в случае однородного поля система запишется в виде

$$C_1 = \sigma \frac{\xi_{xx}}{(1 + \xi x^2)^{3/2}} + \frac{E}{1 + \xi x^2}. \quad (5)$$

Отнесем координаты к половине ширины канала

$$\bar{x} = \frac{x}{b}, \quad \bar{z} = \frac{z}{b}. \quad (6)$$

После деления обеих частей уравнения (5) на σ , получим уравнение равновесия в безразмерной форме:

$$C_1 = \frac{\xi_{xx}}{(1 + \xi x^2)^{3/2}} + \frac{f}{1 + \xi x^2}, \quad f = \frac{bE}{\sigma}. \quad (7)$$

Введем обозначение $\xi x^2 = \eta$. Уравнение (7) относительно η является линейным уравнением с разделяющимися переменными и интегрируется в квадратурах

$$x = \int \frac{d\eta}{(1 + \eta^2)^{3/2} (a + C_1 \eta^2)} + C_2, \quad a = C_1 - f. \quad (8)$$

Подстановкой $v = \eta(1 + \eta^2)^{-1/2}$ интеграл (8) сводится к интегралу от рациональной функции

$$x = \frac{1}{C_1} \int \frac{dv}{\frac{f}{C_1} v^2 + (1 - \frac{f}{C_1})} + C_2. \quad (9)$$

Интеграл (9) - табличный. После обратной подстановки и элементарных преобразований получим

$$x = \frac{1}{\sqrt{f(C_1 - f)}} \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\sqrt{1 + \eta^2}} \sqrt{\frac{f}{C_1 - f}} + C_2. \quad (10)$$

Постоянная интегрирования C_2 определяется из условий симметрии относительно оси z :

$$x = 0, \quad \eta = 0, \quad (11)$$

что дает

$$C_2 = 0.$$

(12)

Разрешим уравнение (10) относительно η , учитывая (12)

$$\eta = \frac{\sqrt{\frac{C_1}{f} - 1} \operatorname{tg} \sqrt{f(C_1 - f)} x}{\sqrt{1 - (\frac{C_1}{f} - 1) \operatorname{tg}^2 \sqrt{f(C_1 - f)} x}}. \quad (13)$$

Возвращаясь к исходной переменной ξ , приходим к квадратуре

$$\xi = \int \frac{\sqrt{\frac{C_1}{f} - 1} \operatorname{tg} \sqrt{f(C_1 - f)} x}{\sqrt{1 - \left(\frac{C_1}{f} - 1\right) \operatorname{tg}^2 \sqrt{f(C_1 - f)} x}} dx + C_3 \quad (I4)$$

Постоянная интегрирования C_3 определяет плоскость отсчета и может быть выбрана произвольно.

Квадратура (I4) подстановкой

$$u = \sqrt{\frac{f}{C_1 - f} - \operatorname{tg}^2 \sqrt{f(C_1 - f)} x} \quad (I5)$$

сводится к интегралу от рациональной функции

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{f(C_1 - f)}} \int \frac{du}{u^2 - \frac{C_1}{C_1 - f}} + C_3, \quad (I6)$$

который берется в конечном виде, и после обратной постановки записывается в форме

$$\xi = \frac{i}{2\sqrt{f} C_1} \operatorname{cn} \frac{\sqrt{\frac{C_1}{C_1 - f}} - \sqrt{\frac{f}{C_1 - f} - \operatorname{tg}^2 \sqrt{f(C_1 - f)} x}}{\sqrt{\frac{C_1}{C_1 - f}} + \sqrt{\frac{f}{C_1 - f} - \operatorname{tg}^2 \sqrt{f(C_1 - f)} x}} + C_3 \quad (I7)$$

Постоянную интегрирования C_3 определим из условия прохождения границы раздела фаз Σ через начало координат ($x = 0, \xi = 0$), что дает

$$C_3 = \frac{1}{2\sqrt{f} C_1} \operatorname{cn} \frac{\sqrt{C_1} + \sqrt{f}}{\sqrt{C_1} - \sqrt{f}} \quad (I8)$$

Тогда окончательно

$$\xi = \frac{1}{2f\varepsilon} \operatorname{cn} \frac{[\varepsilon - \sqrt{1 - (\varepsilon^2 - 1) \operatorname{tg}^2 ax}]}{[\varepsilon + \sqrt{1 - (\varepsilon^2 - 1) \operatorname{tg}^2 ax}]} (1 + \varepsilon), \quad (I9)$$

$\alpha = \sqrt{f(C_1 - f)}$ - корень уравнения (22), $\varepsilon = \sqrt{1 + a^2/f^2}$.

Произвольная постоянная C_1 определяется граничными условиями на твердой стенке. В рассматриваемом частном случае общее условие (2) имеет вид

$$\frac{\xi_x}{(1 + \xi_x^2)^{1/2}} = \cos f \quad \text{при } x = \pm l. \quad (20)$$

Разрешим (20) относительно ξ_x

$$\xi_x = \operatorname{ctg} f \quad \text{при } x = \pm l \quad (21)$$

Условие (21) следует и непосредственно из рисунка 1.

Из уравнения (10) с учетом (12) и (21) получим

$$f \cos \gamma = \sqrt{f(C_1 - f)} \operatorname{tg} \sqrt{f(C_1 - f)}. \quad (22)$$

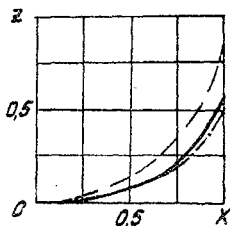


Рис.2. Формы границы раздела жидкость-газ

В частном случае $\gamma = \pi/2$ (поверхностное натяжение на границе раздела жидкость-газ отсутствует) $C = f$, если $\gamma \neq \pi/2$, то $C_1 > f$ и определяется корнем трансцендентного уравнения (22).

Очевидно, что силы поверхностного давления так же, как и гравитационные, делают мениск более плоским. Количественная сторона эффекта иллюстрирована графиком (рис.2), где приведена рассчитанная по формуле (19) форма мениска при $f = 1,5574$, $\gamma = 0$.

Штриховая линия соответствует дуге окружности, реализующейся при $f = 0$. Штрих-пунктиром нанесена равновесная граница раздела в слабом гравитационном поле при $\eta = \frac{1}{29}$. Последняя заимствована из работы [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Шулейкин В.В. Форма поверхности, теряющей весомость. ДАН СССР, 1962, т.147, № 1.
2. Беляева М.А., Слобожанин Л.А., Тунцев А.Д. Гидростатистика в слабых силовых полях. "Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости". АН СССР, вып.6.1968.
3. Черноусько Ф.Л. Задача о равновесии жидкости, подверженной действию сил тяжести и поверхностного натяжения. "Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости". АН СССР, вып. 6, 1968.
4. Петров В.М., Черноусько Ф.Л. Об определении формы равновесия жидкости под действием сил тяжести и поверхностного натяжения. Изв.АН СССР, МЭГ, 1966, № 5.

5. Li T. *Hydrostatics in various gravitational fields.* *J. Chem. Phys.*, 1962, 36, №9.
6. Rosenthal D.K. *The shape and stability of a bubble at the axis of a rotating liquid.* *J. Fluid Mech.*, 1962, 12, №3.
7. Бенедикт Э. Общее поведение жидкости при полной или почти полной невесомости. Сб. "Невесомость. Физические явления и биологические эффекты". М., "Мир", 1964.

Л.И. Могилевич

О ЗАТУХАНИИ СФЕРИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ВОДЕ

Проблема распространения ударной волны в воде вдали от места ее возникновения рассматривалась рядом авторов как теоретически, так и экспериментально [1-4].

В настоящей работе методом сращиваемых асимптотических разложений [5,6] построено решение, описывающее течение вблизи фронта волны и вдали от него, найден закон затухания ударной волны, хорошо согласующийся с экспериментальными данными [3,4].

I. Рассмотрим распространение сферической ударной волны в воде на значительном расстоянии от места взрыва. При небольших давлениях (менее 500 кг/см²) на фронте волны сжатие предполагается адиабатическим и уравнение состояния воды запишем в форме [4]

$$p - p_0 = B \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\eta - 1 \right]. \quad (I.1)$$

Здесь индекс 0 относится к параметрам невозмущенной среды, p - давление, ρ - плотность, $B = 3045$ кг/см², $\eta = 7,15$.

Уравнения движения для сферической волны имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u) + \frac{2\rho u}{z} = 0. \quad (I.2)$$