4-d модели типовых звеньев систем управления

Е.В. Климанова[1], А.В. Максимов[1]

[1]Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Баженова 2, Калуга, Россия, 248000

Аннотация. В работе исследуется возможность применения математического аппарата алгебры кватернионов для моделирования типовых звеньев систем управления. Полученные результаты демонстрируют, что кватернионы позволяют решить поставленную задачу и могут быть использованы при разработке систем управления.

1. Введение

Комплексные числа давно используются при разработке, анализе и оценке систем автоматического управления. Обычно подразумевается, что для комплексного числа вида $z=a+ib$, квадрат мнимой единицы равен -1. Т.е. $i^2=-1$. В [1] был разработан математический аппарат для двумерных систем, исходя из матричного представления комплексных чисел такого вида, и доказано, что алгебраические операции с матрицами изоморфны соответствующим алгебраическим операциям с комплексными числами- прототипами. Следует отметить, что такое представление для мнимой единицы не является единственным.

2. Описание метода

Числа, где $i^2=1$ называются гиперболическими, а числа, для которых справедливо $i^2=0$, параболическими. Поэтому используя подход, описанный в [1] о представлении любого комплексного числа в виде:

$$z=a\cdot\mathbf{E}+b\cdot\mathbf{I}=a\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+b\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ -b & a\end{bmatrix} \tag{1}$$

Здесь: **E** – единичная матрица, выполняющая функцию единицы для действительной части комплексного числа, **I** - единичная матрица для мнимой части. Собственно комплексное число в алгебраической форме представляется либо элементами первой строки матрицы z, либо элементами второго столбца снизу вверх; возможно получить матричное представление для гиперболических чисел ($i^2=1$):

$$z=a\cdot\mathbf{E}+b\cdot\mathbf{I}=a\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+b\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ b & a\end{bmatrix} \tag{2}$$

параболических чисел ($i^2=0$):

$$z=a\cdot\mathbf{E}+b\cdot\mathbf{I}=a\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+b\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & a\end{bmatrix} \tag{3}$$

Тогда, если задана некая линейная стационарная система управления, математическая модель которой представляется линейным дифференциальным уравнением с по стоянными коэффициентами с нулевыми начальными условиями:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x(t) = b_m \frac{d^m y}{dt^m} + \ldots + b_0 y(t) \quad (4)$$

входное воздействие $y(t)$ будет комплекснозначной функцией времени t, то есть:

$$y(t) = y_1(t) + \mathrm{i} y_2(t) \quad (5)$$

выходной сигнал системы управления будет представляться комплекснозначной функцией вида:

$$x(t) = x_1(t) + \mathrm{i} x_2(t) \quad (6)$$

Применив разработанный в [2] математический аппарат, запишем передаточную функцию для случая гиперболических чисел:

$$W(p) = \begin{bmatrix} W_1(p) & W_2(p) \\ W_2(p) & W_1(p) \end{bmatrix} \quad (7)$$

Здесь W_1, W_2 - элементы матрично-комплекснозначной передаточной функции W.
Структурная схема для системы с матрично-комплекснозначной передаточной функцией такого вида будет выглядеть следующим образом:

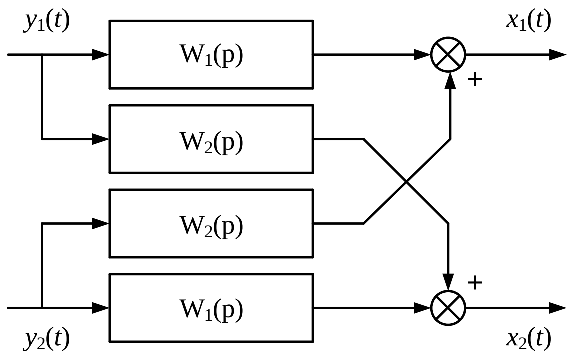

Рисунок 1. Обобщённая матрично-комплекснозначная система управления для случая гиперболических чисел.

Так же, как и в случае с эллиптическими числами, полученная система оказалась полносвязанной. При этом прямые перекрёстные связи имеют равные по значению и по знаку передаточные функции, в то время как эллиптические числа позволяют получить лишь случаи противоположных знаков передаточных функций.
Для параболических чисел матрично-комплекснозначную функцию можно записать как:

$$W(p) = \begin{bmatrix} W_1(p) & W_2(p) \\ 0 & W_1(p) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Соответственно, структурная схема для такой системы примет вид:

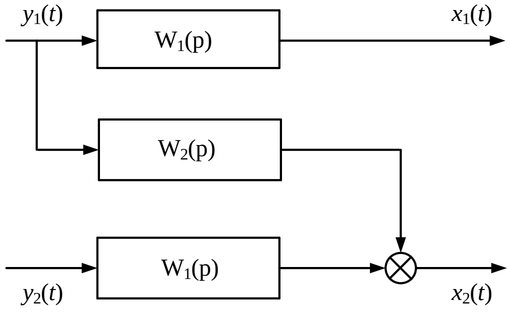

Рисунок 2. Обобщённая матрично-комплекснозначная система управления для случая параболических чисел.

Из рисунка 2 видно, что параболические числа добавили ещё один вид связей в системе управления. А именно, положительную прямую связь по мнимому каналу. При этом следует отметить, что из-за особенностей параболических чисел для существования матрично-комплексной передаточной функции её компоненты не должны быть равны между собой, т.е. $W_1 \neq W_2$.

Определив возможность использования математического аппарата комплексных чисел для моделирования двумерных систем логично исследовать возможности алгебры кватернионов, являющихся удвоением алгебры комплексных чисел.

Рассмотрим линейную стационарную систему управления, математическая модель которой представляется линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами с нулевыми начальными условиями [4]:

$$a_{nm}\frac{d^n x_m(t)}{dt^n}+a_{n-1m}\frac{d^{n-1} x_m(t)}{dt^n}+\ldots+a_{1m}\frac{dx_m(t)}{dt^n}+a_{0m}\frac{a^n x_m(t)}{dt^n}= =b_{km}\frac{d^n y_m(t)}{dt^k}+\ldots+b_{0m}y(t) \qquad (9)$$

Здесь: m – номер канала (m = 0, 1, 2, 3), $y_m(t)$– входной сигнал m-го канала, $x_m(t)$– выходной сигнал m-го канала, n, k – порядки производных выходного и входного сигналов системы соответственно. Пусть входное воздействие $y(t)$ будет кватернионной функцией времени t вида:

$$y(t)=y_1(t)+\mathrm{i}y_2(t)+\mathrm{j}y_3(t)+\mathrm{k}y_4(t) \qquad (10)$$

Тогда в общем случае выходной сигнал системы управления представляет собой кватернионную функцию:

$$x(t)=x_1(t)+\mathrm{i}x_2(t)+\mathrm{j}x_3(t)+\mathrm{k}x_4(t) \qquad (11)$$

Это означает, что рассматриваемая во множестве гиперкомплексных переменных одномерная система с гиперкомплексными функциями входа $y(t)$ и выхода $x(t)$ будет четырёхмерной для функций из множества действительных переменных, составляющих четвёрки гиперкомплексных функций входа и выхода. Пусть для более четкого изложения материала порядки производных сигналов по входу одинаковы и равны k, по выходу тоже одинаковы и равны n. Представим уравнение (9) в операторном виде [5-6]:

$$A_m(p)x_m(t)= B_m(p)y_m(t) \qquad (12)$$

где $A_m(p)=T^n_{1m}p^n+T^{n-1}_{2m}p^{n-1}+\ldots+T_{(n-1)m}p+1$, $B_m(p)=\tau^k_{1m}p^k+\ldots+\tau_{(k-1)m}p+1$ – операторные полиномы входной и выходной частей m-го канала, T_{nm}, τ_{km} – постоянные времени элементов m-го канала, $T_{1m}, T_{2m}, T_{3m}, T_{4m}, \tau_{1m}, \tau_{2m}, \tau_{3m}, \tau_{4m}$ - первые нижние индексы определяют принадлежность коэффициента к действительной части переменной - цифра 1 и к мнимой части – цифры 2, 3, 4.

Раскрывая в (12) нижние индексы и, переписав это уравнение четыре раза, получим совокупность операторных уравнений, полностью описывающей нашу систему управления:

$$\begin{aligned}&A_0(p)x_0(t)=B_0(p)y_0(t),\\&A_1(p)x_1(t)=B_1(p)y_1(t),\\&A_2(p)x_2(t)=B_2(p)y_2(t),\\&A_3(p)x_3(t)=B_3(p)y_3(t)\end{aligned} \qquad (13)$$

Систему уравнений (13) можно записать в матричном виде:

$$A(p)X(t)=B(p)Y(t) \qquad (14)$$

При этом следует отметить, матрицы $A(p)$ и $B(p)$ в данном случае описывают четырёхканальную систему с независимыми каналами управления, изучение которых не является целью данной работы. Для полносвязанной системы, т.е. системы с перекрёстными связями, требуется кватернионное представление матриц $A(p)$ и $B(p)$, что означает 16-элементное представление каждой.

Разрешая уравнение (14) относительно выходного сигнала $X(t)$, получим:

$$X(t)=A^{-1}(p)B(p)Y(t)=W(p)Y(t) \qquad (15)$$

Здесь: $W(p)=A^{-1}(p)B(p)$ – кватернионная матрица передаточной функции рассматриваемой системы:

$$W(p)=\begin{bmatrix}W_0(p) & -W_1(p) & -W_2(p) & -W_3(p)\\ W_1(p) & W_0(p) & -W_3(p) & W_2(p)\\ W_2(p) & W_3(p) & W_0(p) & -W_1(p)\\ W_3(p) & -W_2(p) & W_1(p) & W_0(p)\end{bmatrix} \qquad (16)$$

На основании (15) с учетом (16) можно построить структурную схему обобщенной матрично-кватернионной системы управления (Рисунок 3).

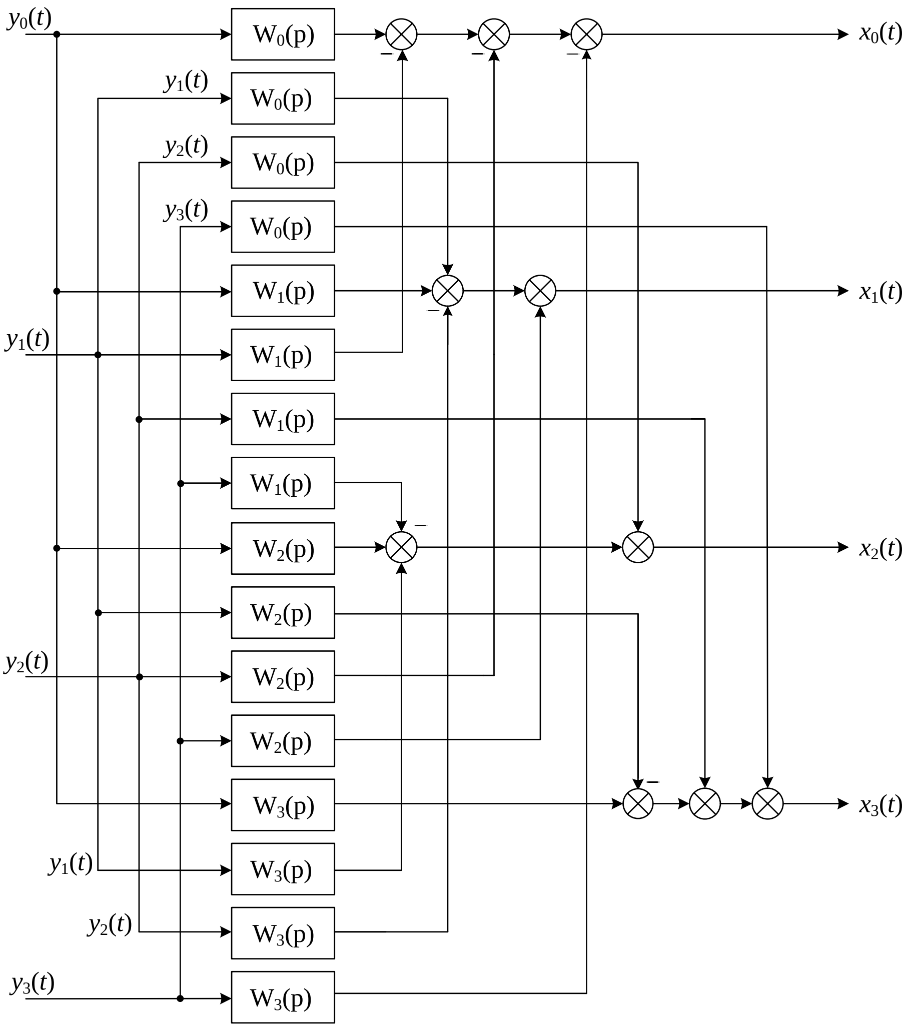

Рисунок 3. Обобщённая матрично-кватернионная система управления.

Как видно из рисунка 3 новая система является полносвязанной. Следовательно, изменение любого из входных параметров повлияет на систему в целом. Это означает, что от таких систем следует ожидать расширения функций при их конкретных технических реализациях.

3. Вывод

Предлагаемый математический метод позволяет существенно расширить представления о типовых звеньях систем управления и на этой основе изменить методику анализа многомерных систем.

4. Литература

[1] Климанова, Е.В. Комплекснозначные и гиперкомплексные модели типовых звеньев систем управления. Часть 1. Математический аппарат для двумерных систем / Е.В. Климанова, А.В. Максимов, Е.А. Максимова // Радиотехника, Электромагнитные волны и электронные системы. – 2016. – Т. 9. – С. 66-72.

[2] Котельников, А.П. Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике. – М.: КомКнига, 2006. – 224 с.

[3] Кантор, И.Л. Гиперкомплексные числа / И.Л. Кантор, А.С. Солодовников. – М.: Наука, 1973. – 144 с.

[4] Бесекерский, В.А. Теория систем автоматического регулирования / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. – М.: Наука, 1975. – 768 с.
[5] Пупков, К.А. Матричные методы расчета и проектирования сложных систем автоматического управления для инженеров / К.А. Пупков, Н.Д. Егупов. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 664 с.
[6] Пупков, К.А. Методы классической и современной теории автоматического управления. Т. 1: Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления / К.А. Пупков, Н.Д. Егупов. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 656 с.

Four – dimensional models for control system typical units

E.V. Klimanova[1], A.V. Maksimov[1]

[1]Bauman Moscow State Technical University, Bazhenova 2, Kaluga, Russia, 248000

Abstract. This study examines the possibility of applying quaternions for control system typical units modeling. The hypothesis is that the current understanding of development may be expanded by making use of different mathematical objects and approaches. As a result four-dimensional models have been obtained.