# Алгебры *n*-местных отношений

**В.П. Цветов**[1]

[1]Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

**Аннотация.** Алгебры *n*-местных отношений являются естественным обобщением алгебры бинарных отношений с операциями пересечения, объединения, композиции и взятия обратного. В работе рассматриваются подобные алгебры различных типов и исследуются их свойства. С учетом непосредственной связи гиперграфов и *n*-местных отношений полученные результаты найдут очевидные применения в теории графов и гиперграфов, теории автоматов и теории искусственного интеллекта.

## 1. Введение

В отличие от теории графов, которая является прикладным разделом теории бинарных отношений и к настоящему времени детально исследована, как в алгебраическом, так и в алгоритмическом аспектах, теория гиперграфов находится на стадии формирования. Понятие гиперграфа обобщает понятие графа в той же степени, в которой геометрия *n*-мерных линейных векторных и аффинных пространств обобщает геометрию плоскости. Возрастающий интерес к гиперграфовым моделям обусловлен, в первую очередь, удобством их применения в сфере информационных технологий и проектирования интеллектуальных вычислительных систем. Так, например, работы [1-4] иллюстрируют применение гиперграфов в общей теории машинного обучения. В серии работ [5-8] гиперграфовые модели используются применительно к распознаванию образов. Работы [9-13] используют гиперграфовый подход к решению задач кластеризации.

В настоящее время в теории графов закрепился алгебраический подход, который позволяет с единых позиций подходить к формулировкам и решению многих прикладных задач. Алгоритмы решения стандартных задач теории графов используют операции над графами, которые моделируются стандартными операциями над бинарными отношениями. Так теоретико-множественным операциям объединения и пересечения графиков бинарных отношений соответствуют операции объединения и пересечения графов. Операция взятия обратного к бинарному отношению соответствует операции изменения направления ребер графа, операция композиции бинарных отношений непосредственно связана с маршрутами на графах, а теоретико-множественное отношение включение графиков бинарных отношений описывает понятие подграфа исходного графа.

Обобщение методов теории графов на гиперграфы удобно проводить, используя аппарат универсальной алгебры и алгебраических систем [14], применительно к конкретной предметной области, как это делается, например, в [15] при исследовании троичной компьютерной арифметики. В настоящей статье автор развивает подход, предложенный в [16].

Формально, гиперграфы определяются как $n$-местные отношения на конечном или счетном множестве вершин $U$, т.е. подмножества в $U^n$, или элементы булеана $2^{U^n}$. При $n = 2$ приходим к понятию графа, как бинарного отношения на множестве $U$, или элемента булеана $2^{U \times U}$. Теоретико-множественные операции определены для представителей обоих классов, а алгебраические системы $\left\langle 2^{U \times U}, \left(\cup, \cap, ^{-}, \varnothing, U \times U\right)\right\rangle$ и $\left\langle 2^{U^n}, \left(\cup, \cap, ^{-}, \varnothing, U^n\right)\right\rangle$ образуют булевы алгебры.

Менее тривиально дело обстоит с операциями композиции и взятия обратного. Уже в классе бинарных отношений, стандартным образом определяя обратное $R^{-1}$ и левую композицию (произведение) $R_1 \circ R_2$,

$$R^{-1} = \left\{\left(u_2, u_1\right) | \left(u_1, u_2\right) \in R\right\}, \tag{1}$$

$$R_1 \circ R_2 = \left\{\left(u_1, u_2\right) | \exists u_3 \left(u_1, u_3\right) \in R_1 \wedge \left(u_3, u_2\right) \in R_2\right\}, \tag{2}$$

можно рассмотреть пару изоморфных полугрупп $\left\langle 2^{U \times U}, (\circ, I)\right\rangle \sim \left\langle 2^{U \times U}, (\bullet, I)\right\rangle$ с единицей, две пары изоморфных полугрупп $\left\langle 2^{U \times U}, (\circ_1, I)\right\rangle \sim \left\langle 2^{U \times U}, (\bullet_1, I)\right\rangle$ и $\left\langle 2^{U \times U}, (\circ_2, I)\right\rangle \sim \left\langle 2^{U \times U}, (\bullet_2, I)\right\rangle$ с левыми и правыми единицами, соответственно, и пару изоморфных полугрупп $\left\langle 2^{U \times U}, (\circ_3)\right\rangle \sim \left\langle 2^{U \times U}, (\bullet_3)\right\rangle$ без единицы:

$$R_1 \bullet R_2 = R_2 \circ R_1, \tag{3}$$

$$R_1 \circ_1 R_2 = R_1^{-1} \circ R_2, \tag{4}$$

$$R_1 \bullet_1 R_2 = R_2^{-1} \circ R_1, \tag{5}$$

$$R_1 \circ_2 R_2 = R_1 \circ R_2^{-1}, \tag{6}$$

$$R_1 \bullet_2 R_2 = R_2 \circ R_1^{-1}. \tag{7}$$

$$R_1 \circ_3 R_2 = R_1^{-1} \circ R_2^{-1}, \tag{8}$$

$$R_1 \bullet_3 R_2 = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}. \tag{9}$$

Здесь $I$ - отношение равенства на $U$. Понятно, что для симметричных бинарных отношений $R = R^{-1}$ циклические полугруппы $\left\langle \left\{R^n\right\}_{n=0}^{\infty}, (\circ, I)\right\rangle$, $\left\langle \left\{R^n\right\}_{n=0}^{\infty}, (\bullet, I)\right\rangle$, $\left\langle \left\{R^n\right\}_{n=0}^{\infty}, (\circ_i, I)\right\rangle$, $\left\langle \left\{R^n\right\}_{n=0}^{\infty}, (\bullet_i, I)\right\rangle$, где $i \in 1..3$, совпадают.

В случае конечного множества $U$ циклическая полугруппа $\left\langle \left\{R^n\right\}_{n=0}^{\infty}, (\circ, I)\right\rangle$ естественным образом возникает при построении маршрутов на графе [17]. Аналоги операций (1)-(9) для $n$-местных отношений позволяют определить алгебры, пригодные для изучения гиперграфов и обобщить алгоритмы, разработанные для графов на гиперграфовые модели.

## 2. Алгебры n-местных отношений

Рассмотрим класс $n$-местных отношений $2^{U^n}$, и для $i \neq j$ определим операции

$$R^{(\mathrm{ij})} = R^{(\mathrm{ji})} = \left\{\left(u_1, .., u_j, .., u_i, .., u_n\right) | \left(u_1, .., u_i, .., u_j, .., u_n\right) \in R\right\}, \tag{10}$$

$$R_1 \circ_{ij} R_2 = \left\{\left(u_1, .., u_i, .., u_j, .., u_n\right) | \exists u_0 \left(u_1, .., u_0, .., u_j, .., u_n\right) \in R_1 \wedge \left(u_1, .., u_i, .., u_0, .., u_n\right) \in R_2\right\}. \tag{11}$$

Очевидно, операция (10) инволютивна

$$\left(R^{(\mathrm{ij})}\right)^{(\mathrm{ij})} = R\,. \tag{12}$$

Кроме того,

$$R_1 \circ_{ij} R_2 = R_2 \circ_{ji} R_1\,. \tag{13}$$

Нетрудно показать, что операция (11) ассоциативна. Действительно,

$$\left(u_1,..,u_i,..,u_j,..,u_n\right) \in R_1 \circ_{ij} \left(R_2 \circ_{ij} R_3\right) \Leftrightarrow \exists u_0 \left(u_1,..,u_0,..,u_j,..,u_n\right) \in R_1 \wedge \left(u_1,..,u_i,..,u_0,..,u_n\right) \in R_2 \circ_{ij} R_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists u_0 \left(u_1,..,u_0,..,u_j,..,u_n\right) \in R_1 \wedge \left(\exists u_0' \left(u_1,..,u_0',..,u_0,..,u_n\right) \in R_2 \wedge \left(u_1,..,u_i,..,u_0',..,u_n\right) \in R_3\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists u_0' \left(\exists u_0 \left(u_1,..,u_0,..,u_j,..,u_n\right) \in R_1 \wedge \left(u_1,..,u_0',..,u_0,..,u_n\right) \in R_2\right) \wedge \left(u_1,..,u_i,..,u_0',..,u_n\right) \in R_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists u_0' \left(u_1,..,u_0',..,u_j,..,u_n\right) \in R_1 \circ_{ij} R_2 \wedge \left(u_1,..,u_i,..,u_0',..,u_n\right) \in R_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(u_1,..,u_i,..,u_j,..,u_n\right) \in \left(R_1 \circ_{ij} R_2\right) \circ_{ij} R_3\,.$$

Определим

$$I_{ij} = \left\{\left(u_1,..,u_i,..,u_j,..,u_n\right) \mid k \in 1..n \wedge u_k \in U \wedge u_j = u_i\right\}. \tag{14}$$

Очевидно,

$$\left(u_1,..,u_i,..,u_j,..,u_n\right) \in I_{ij} \circ_{ij} R \Leftrightarrow \exists u_0 \left(u_1,..,u_0,..,u_j,..,u_n\right) \in I_{ij} \wedge \left(u_1,..,u_i,..,u_0,..,u_n\right) \in R \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists u_0 \left(u_1,..,u_i,..,u_0,..,u_n\right) \in R \wedge u_j = u_0 \Leftrightarrow \left(u_1,..,u_i,..,u_j,..,u_n\right) \in R\,.$$

Аналогично,

$$\left(u_1,..,u_i,..,u_j,..,u_n\right) \in R \circ_{ij} I_{ij} \Leftrightarrow \exists u_0 \left(u_1,..,u_0,..,u_j,..,u_n\right) \in R \wedge \left(u_1,..,u_i,..,u_0,..,u_n\right) \in I_{ij} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists u_0 \left(u_1,..,u_0,..,u_j,..,u_n\right) \in R \wedge u_i = u_0 \Leftrightarrow \left(u_1,..,u_i,..,u_j,..,u_n\right) \in R\,.$$

Таким образом,

$$I_{ij} \circ_{ij} R = R \circ_{ij} I_{ij} = R\,. \tag{15}$$

Следовательно, $\left\langle 2^{U^n}, \left(\circ_{ij}, I_{ij}\right)\right\rangle$ - полугруппы с единицей.

Далее заметим, что

$$\left(u_1,..,u_i,..,u_j,..,u_n\right) \in \left(R_1 \circ_{ij} R_2\right)^{(\mathrm{ij})} \Leftrightarrow \left(u_1,..,u_j,..,u_i,..,u_n\right) \in R_1 \circ_{ij} R_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists u_0 \left(u_1,..,u_0,..,u_i,..,u_n\right) \in R_1 \wedge \left(u_1,..,u_j,..,u_0,..,u_n\right) \in R_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists u_0 \left(u_1,..,u_i,..,u_0,..,u_n\right) \in R_1^{(\mathrm{ij})} \wedge \left(u_1,..,u_0,..,u_j,..,u_n\right) \in R_2^{(\mathrm{ij})} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(u_1,..,u_i,..,u_j,..,u_n\right) \in R_1^{(\mathrm{ij})} \circ_{ji} R_2^{(\mathrm{ij})} \Leftrightarrow \left(u_1,..,u_i,..,u_j,..,u_n\right) \in R_2^{(\mathrm{ij})} \circ_{ij} R_1^{(\mathrm{ij})}\,.$$

Таким образом,

$$\left(R_1 \circ_{ij} R_2\right)^{(\mathrm{ij})} = R_1^{(\mathrm{ij})} \circ_{ji} R_2^{(\mathrm{ij})} = R_2^{(\mathrm{ij})} \circ_{ij} R_1^{(\mathrm{ij})}\,. \tag{16}$$

Следовательно, тотальные биекции $F_{ij}\left(R\right) := R^{(\mathrm{ij})}$ являются изоморфизмом полугрупп $\left\langle 2^{U^n}, \left(\circ_{ij}, I_{ij}\right)\right\rangle$ и $\left\langle 2^{U^n}, \left(\circ_{ji}, I_{ji}\right)\right\rangle$.

Кроме того,

$$\left(u_1,..,u_i,..,u_k,..,u_j,..,u_n\right)\in\left(R_1\circ_{ik}R_2\right)^{(\mathrm{ij})}\Leftrightarrow\left(u_1,..,u_j,..,u_k,..,u_i,..,u_n\right)\in R_1\circ_{ik}R_2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\exists u_0\left(u_1,..,u_0,..,u_k,..,u_i,..,u_n\right)\in R_1\wedge\left(u_1,..,u_j,..,u_0,..,u_i,..,u_n\right)\in R_2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\exists u_0\left(u_1,..,u_i,..,u_k,..,u_0,..,u_n\right)\in R_1^{(\mathrm{ij})}\wedge\left(u_1,..,u_i,..,u_0,..,u_j,..,u_n\right)\in R_2^{(\mathrm{ij})}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(u_1,..,u_i,..,u_j,..,u_n\right)\in R_1^{(\mathrm{ij})}\circ_{jk}R_2^{(\mathrm{ij})}\Leftrightarrow\left(u_1,..,u_i,..,u_j,..,u_n\right)\in R_2^{(\mathrm{ij})}\circ_{kj}R_1^{(\mathrm{ij})}.$$

Откуда

$$\left(R_1\circ_{ik}R_2\right)^{(\mathrm{ij})}=R_1^{(\mathrm{ij})}\circ_{jk}R_2^{(\mathrm{ij})}=R_2^{(\mathrm{ij})}\circ_{kj}R_1^{(\mathrm{ij})}. \quad (17)$$

Следовательно, полугруппы $\left\langle 2^{U^n},\left(\circ_{ik},I_{ik}\right)\right\rangle$ и $\left\langle 2^{U^n},\left(\circ_{jk},I_{jk}\right)\right\rangle$ также изоморфны.

Определим алгебры $\left\langle 2^{U^n},\left(\circ_{ij},\circ_{ik},I_{ij},I_{ik}\right)\right\rangle$ и, по аналогии с [2], обозначим $1_R:=U^n$, и рассмотрим цепочку логических следований

$$\left(u_1,..,u_i,..,u_j,..,u_k,..,u_n\right)\in R_1\circ_{ij}\left(R_2\circ_{ik}R_3\right)\Leftrightarrow\exists u_0\left(u_1,..,u_0,..,u_j,..,u_k,..,u_n\right)\in R_1\wedge$$
$$\wedge\left(u_1,..,u_i,..,u_0,..,u_k,..,u_n\right)\in R_2\circ_{ik}R_3\Leftrightarrow\exists u_0\,\exists u_0'\left(u_1,..,u_0,..,u_j,..,u_k,..,u_n\right)\in R_1\wedge$$
$$\wedge\left(u_1,..,u_0',..,u_0,..,u_k,..,u_n\right)\in R_2\wedge\left(u_1,..,u_i,..,u_0,..,u_0',..,u_n\right)\in R_3\Leftrightarrow$$
$$\exists u_0'\,\exists u_0\left(u_1,..,u_0,..,u_j,..,u_k,..,u_n\right)\in R_1\wedge\left(u_1,..,u_0',..,u_0,..,u_k,..,u_n\right)\in R_2\wedge$$
$$\wedge\left(u_1,..,u_i,..,u_0,..,u_0',..,u_n\right)\in R_3\Rightarrow$$
$$\exists u_0'\left(\exists u_0\left(u_1,..,u_0,..,u_j,..,u_k,..,u_n\right)\in R_1\wedge\left(u_1,..,u_0',..,u_0,..,u_k,..,u_n\right)\in R_2\right)\wedge$$
$$\wedge\left(\exists u_0\left(u_1,..,u_i,..,u_0,..,u_0',..,u_n\right)\in R_3\right)\Leftrightarrow\exists u_0'\left(u_1,..,u_0',..,u_j,..,u_k,..,u_n\right)\in R_1\circ_{ij}R_2\wedge$$
$$\wedge\left(\exists u_0\left(u_1,..,u_i,..,u_0,..,u_0',..,u_n\right)\in R_3\wedge\left(u_1,..,u_0,..,u_j,..,u_0',..,u_n\right)\in 1_R\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\exists u_0'\left(u_1,..,u_0',..,u_j,..,u_k,..,u_n\right)\in R_1\circ_{ij}R_2\wedge\left(u_1,..,u_i,..,u_j,..,u_0',..,u_n\right)\in R_3\circ_{ij}1_R\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(u_1,..,u_i,..,u_j,..,u_k,..,u_n\right)\in\left(R_1\circ_{ij}R_2\right)\circ_{ik}\left(R_3\circ_{ij}1_R\right).$$

Последнее означает, что

$$R_1\circ_{ij}\left(R_2\circ_{ik}R_3\right)\subseteq\left(R_1\circ_{ij}R_2\right)\circ_{ik}\left(R_3\circ_{ij}1_R\right), \quad (18)$$

Теперь рассмотрим

$$\left(u_1,..,u_i,..,u_j,..,u_n\right)\in R\circ_{ij}R^{(\mathrm{ij})}\Leftrightarrow\exists u_0\left(u_1,..,u_0,..,u_j,..,u_n\right)\in R\wedge\left(u_1,..,u_i,..,u_0,..,u_n\right)\in R^{(\mathrm{ij})}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\exists u_0\left(u_1,..,u_0,..,u_j,..,u_n\right)\in R\wedge\left(u_1,..,u_0,..,u_i,..,u_n\right)\in R. \quad (19)$$

Если $n$-местное отношение $R$ обладает свойством функциональности по $i$-му и $j$-му аргументам, т.е.

$$\forall u_1,...,u_i,..,u_j,u_j',..,u_n\left(u_1,..,u_i,..,u_j,..,u_n\right)\in R\wedge\left(u_1,..,u_i,..,u_j',..,u_n\right)\in R\rightarrow u_j=u_j', \quad (20)$$

то из (18)-(19) следует, что

$$\left(u_1,..,u_i,..,u_j,..,u_n\right)\in R\circ_{ij}R^{(\mathrm{ij})}\Rightarrow u_i=u_j\Leftrightarrow\left(u_1,..,u_i,..,u_j,..,u_n\right)\in I_{ij}\Leftrightarrow R\circ_{ij}R^{(\mathrm{ij})}\subseteq I_{ij}, \quad (21)$$

Если предположить сюръективность $n$-местного отношения $R$ по $i$-му аргументу, т.е.

$$\forall u_1,...,u_{i-1},u_{i+1},..,u_j,..,u_n\,\exists u_0\left(u_1,..,u_0,..,u_j,..,u_n\right)\in R, \quad (22)$$

то из (21) будет следовать обратное включение

$$R \circ_{ij} R^{(\mathrm{ij})} \subseteq I_{ij}\,, \tag{23}$$

Таким образом, для функционального по $i$-му и $j$-му аргументам и сюръективного по $i$-му аргументу $n$-местного отношения $R$ имеет место равенство

$$R \circ_{ij} R^{(\mathrm{ij})} = I_{ij}\,, \tag{24}$$

Аналогично предыдущему, из свойств функциональности по $j$-му и $i$-му аргументам и сюръективности по $j$-му аргументу $n$-местного отношения $R$ будет следовать равенство

$$R^{(\mathrm{ij})} \circ_{ij} R = I_{ij}\,, \tag{25}$$

Следовательно, функциональное и сюръективное по обоим аргументам $n$-местное отношение $R$ обратимо по операции $\circ_{ij}$.

Нетрудно показать, что множество $n$-местных отношений, обладающих свойством функциональности по $i$-му и $j$-му аргументам, замкнуто относительно операции $\circ_{ij}$.

Аналогичное утверждение справедливо для отношений, сюръективных по $i$-му аргументу.

Таким образом, класс функциональных и сюръективных по обоим аргументам $n$-местных отношений образует подгруппу полугруппы $\left\langle 2^{U^n}, \left(\circ_{ij}, I_{ij}\right)\right\rangle$.

Так же как и бинарные отношения [16], $n$-местные отношения обладают следующими свойствами:

$$R_1 \circ_{ij} \left(R_2 \cup R_3\right) = \left(R_1 \circ_{ij} R_2\right) \cup \left(R_1 \circ_{ij} R_3\right), \tag{26}$$

$$\left(R_2 \cup R_3\right) \circ_{ij} R_1 = \left(R_2 \circ_{ij} R_1\right) \cup \left(R_3 \circ_{ij} R_1\right), \tag{27}$$

$$R_1 \circ_{ij} \left(R_2 \cap R_3\right) \subseteq \left(R_1 \circ_{ij} R_2\right) \cap \left(R_1 \circ_{ij} R_3\right), \tag{28}$$

$$\left(R_2 \cap R_3\right) \circ_{ij} R_1 \subseteq \left(R_2 \circ_{ij} R_1\right) \cap \left(R_3 \circ_{ij} R_1\right), \tag{29}$$

что позволяет определить алгебраические структуры $\left\langle 2^{U^n}, \left(\cup, \cap, \circ_{ij}, \circ_{ik}, {}^{(\mathrm{ij})}, \subseteq, \varnothing, U^n, I_{ij}, I_{ik}\right)\right\rangle$, обладающие свойствами (12)-(18), (23)-(29).

## 3. Заключение

В работе рассмотрены алгебры $n$-местных отношений, построенные в результате обобщения стандартной алгебры бинарных отношений, и изучены некоторые их свойства. Мы ограничились изучением алгебр с носителями $2^{U^n}$, которым соответствуют $n$-местные отношения или гиперграфы с фиксированным и равным $n$ количеством вершин, образующих гиперребра. Определенная выше операция $\circ_{ij}$ может быть интерпретирована как операция «спрямления гиперребра» или «удаления общей промежуточной вершины». Так, например, в случае $U = \{u_0, u_1, u_2, u_3\}$, полугруппы $\left\langle 2^{U^3}, \left(\circ_{23}, I_{23}\right)\right\rangle$ и тернарного отношения $R = \left\{\left(u_1, u_0, u_3\right), \left(u_1, u_2, u_0\right)\right\}$ получаем

$$I_{23} = \left\{ \begin{matrix} \left(u_0,u_0,u_0\right),\left(u_0,u_1,u_1\right),\left(u_0,u_2,u_2\right),\left(u_0,u_3,u_3\right), \\ \left(u_1,u_0,u_0\right),\left(u_1,u_1,u_1\right),\left(u_1,u_2,u_2\right),\left(u_1,u_3,u_3\right), \\ \left(u_2,u_0,u_0\right),\left(u_2,u_1,u_1\right),\left(u_2,u_2,u_2\right),\left(u_2,u_3,u_3\right), \\ \left(u_3,u_0,u_0\right),\left(u_3,u_1,u_1\right),\left(u_3,u_2,u_2\right),\left(u_3,u_3,u_3\right) \end{matrix} \right\},$$

$$R \circ_{23} R = \{(u_1, u_2, u_3)\},$$

$$R \circ_{23} R \circ_{23} R = \varnothing .$$

Определяя графики $n$-местных отношений при помощи индикаторов $\chi_R : U^n \to \{0,1\}$, где

$$\chi_R(u_1,..,u_n) = \begin{cases} 1, (u_1,..,u_n) \in R \\ 0, (u_1,..,u_n) \notin R \end{cases},$$

несложно перейти к представлению гиперграфов в виде двоичных массивов $\psi^R_{i_1,..,i_n}$, где $k \in 1..n \wedge i_k \in 1..|U|$, и реализации соответствующих индуцированных алгебр с помощью логических операций.

Очевидный практический интерес представляют алгебры конечноместных отношений с носителем $\bigcup_{n=1}^{\infty} 2^{U^n}$ и операциями композиции, изменяющими количество мест в отношениях, как, например, в случае операций «склеивания гиперребер» $\circ_g$ или «замещения цепочек» $\circ_r$ :

$$R_1 \circ_g R_2 = \{(u_1,..,u_{m-1},u'_2,..,u'_n) \mid \exists u_0 \; (u_1,..,u_{m-1},u_0) \in R_1 \wedge (u_0,u'_2,..,u'_n) \in R_2\},$$

$$R_1 \circ_r R_2 = \left\{(u_1,..,u_{i-1},u'_{j+1},..,u'_n) \mid \exists u_0 \exists i \exists j \; (u_1,..,u_{i-1},u_0,..,u_m) \in R_1 \wedge (u'_1,..,u_0,u'_{j+1},..,u'_n) \in R_2\right\}.$$

Так для тернарного отношения из предыдущего примера

$$R^{(13)} = \{(u_3,u_0,u_1),(u_0,u_2,u_1)\},$$

$$R \circ_g R^{(13)} = \{(u_1,u_0,u_0,u_1),(u_1,u_2,u_2,u_1)\},$$

$$R \circ_r R = \{(u_1),(u_0,u_3),(u_1,u_0),(u_1,u_2),(u_1,u_3),(u_2,u_0),(u_1,u_2,u_3)\}.$$

Понятно, что даже в случае конечной мощности множества $U$ невозможна конечная реализация алгебр с операциями указанного вида. Возможность подобных реализаций в частных случаях представляет самостоятельный интерес и требует отдельного изучения.

**4. Литература**

[1] Hein, M. The total variation on hypergraphs-learning on hypergraphs revisited / M. Hein, S. Setzer, L. Jost, S.S. Rangapuram // Advances in Neural Information Processing Systems, 2013. – P. 2427-2435.

[2] Ricatte, T. Hypernode graphs for spectral learning on binary relations over sets / T. Ricatte, R. Gilleron, M. Tommasi // Joint European Conference on Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases, 2014. – P. 662-677.

[3] Louis, A. Hypergraph markov operators, eigenvalues and approximation algorithms // Proceedings of the Forty-Seventh Annual ACM on Symposium on Theory of Computing, 2015. – P. 713-722.

[4] Zhang, C. Re-revisiting Learning on Hypergraphs: Confidence Interval and Subgradient Method / C. Zhang, S. Hu, Z.G. Tang, T.H. Chan // Proceedings of the 34th International Conference on Machine Learning. – 2017. – Vol. 70. – P. 4026-4034.

[5] Pu, L. Hypergraph learning with hyperedge expansion / L. Pu, B. Faltings // Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases , 2012. – P. 410-425.

[6] Yu, J. Adaptive hypergraph learning and its application in image classification / J. Yu, D. Tao, M. Wang // IEEE Transactions on Image Processing. – 2012. – Vol. 21(7). – P. 3262-3272.

[7] Panagopoulos, A. Simultaneous cast shadows, illumination and geometry inference using hypergraphs / A. Panagopoulos, C .Wang, D. Samaras, N. Paragios // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 2013. – Vol. 35(2). – P. 437-449.

[8] Hein, M. The total variation on hypergraphs-learning on hypergraphs revisited / M. Hein, S. Setzer, L. Jost, S.S. Rangapuram // Advances in Neural Information Processing Systems, 2013. – P. 2427-2435.
[9] Ricatte, T. Hypernode graphs for spectral learning on binary relations over sets / T. Ricatte, R. Gilleron, M. Tommasi // Joint European Conference on Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases, 2014. – P. 662-677.
[10] Louis, A. Hypergraph markov operators, eigenvalues and approximation algorithms // Proceedings of the Forty-Seventh Annual ACM on Symposium on Theory of Computing, 2015. – P. 713-722.
[11] Zhang, C. Re-revisiting Learning on Hypergraphs: Confidence Interval and Subgradient Method / C. Zhang, S. Hu, Z.G. Tang, T.H. Chan // Proceedings of the 34th International Conference on Machine Learning. – 2017. – Vol. 70. – P. 4026-4034.
[12] Pu, L. Hypergraph learning with hyperedge expansion / L. Pu, B. Faltings // Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases , 2012. – P. 410-425.
[13] Yu, J. Adaptive hypergraph learning and its application in image classification / J. Yu, D. Tao, M. Wang // IEEE Transactions on Image Processing. – 2012. – Vol. 21(7). – P. 3262-3272.
[14] Panagopoulos, A. Simultaneous cast shadows, illumination and geometry inference using hypergraphs / A. Panagopoulos, C .Wang, D. Samaras, N. Paragios // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 2013. – Vol. 35(2). – P. 437-449.
[15] Wang, M. Visual classification by l1-hypergraph modeling / M. Wang, X. Wu // IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering. – 2015. – Vol. 27(9). – P. 2564-2574.
[16] Zhou, D. Learning with Hypergraphs: Clustering, Classification, and Embedding / D. Zhou, J. Huang, B. Scholkopf // Advances in Neural Information Processing Systems: Proceedings of the Conference. –2007. – Vol. 19. – P. 1601-1608.
[17] Ghoshdastidar, D. Consistency of Spectral Partitioning of UniformHypergraphs under Planted Partition Model / D. Ghoshdastidar, D. Ambedkar // Advances in Neural Information ProcessingSystems 27: Annual Conference on Neural Information Processing Systems, 2014. – P. 397-405.
[18] Ghoshdastidar, D. A Provable Generalized Tensor Spectral Method forUniform Hypergraph Partitioning / D. Ghoshdastidar, D. Ambedkar // Proceedings of the 32nd International Conference onMachine Learning, ICML, 2015. – P. 400-409.
[19] Ghoshdastidar, D. Consistency of spectral hypergraph partitioning underplanted partition model / D. Ghoshdastidar, D. Ambedkar // Ann. Statist. – 2017. – Vol. 45.1. – P. 289-315.
[20] Chien, I. Community Detection in Hypergraphs: Optimal Statistical Limitand Efficient Algorithms / I. Chien, C. Lin, I. Wang // Proceedings of the Twenty-First International Conference onArtificial Intelligence and Statistics, in PMLR. – 2018. – Vol. 84. – P. 871-879.
[21] Мальцев, А.И. Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970. – 392 с.
[22] Чернов, В. М. Тернарные системы счисления в конечных полях // Компьютерная оптика. – 2018. – Т. 42, № 4. – С. 704-711. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-4-704-711.
[23] Цветов, В.П. Двойственные упорядоченные структуры бинарных отношений // Сборник трудов IV международной конференции ИТНТ, 2018. – С. 2635-2644.
[24] Цветов, В.П. Об одном синтаксическом алгоритме на графах // Сборник трудов международной научно-технической конференции ПИТ, 2014. – С. 235-238.

# Algebras of finitary relations

**V.P. Tsvetov**[1]

[1]Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

**Abstract.** Algebras of finitary relations naturally generalize the algebra of binary relations with the left composition. In this paper, we consider some properties of such algebras. It's well known that we can study the hypergraphs as finitary relations. In this way the results can be applied to graph and hypergraph theory, automatons and artificial intelligence.