

Алгоритм оптимального оценивания параметров нелинейного термодинамического поля оптического элемента, работающего на пропускание инфракрасного излучения

А.А. Дегтярев^а, Т.В. Трушевская^а

^а Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, 443086, Московское шоссе, 34, Самара, Россия

Аннотация

В работе решается обратная задача (задача оценивания параметров) для нелинейного уравнения теплопроводности, описывающего процесс теплового воздействия инфракрасного лазерного излучения на слабо поглощающий оптический элемент. С учётом особенностей функции цели, имеющей овраговую структуру, разработан алгоритм поиска оптимальных значений показателя поглощения и коэффициента теплообмена между гранями оптического элемента и окружающей средой. Алгоритм основан на применении модифицированного метода золотого сечения. При решении задачи оценивания параметров использован среднеквадратический критерий качества.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности; оптический элемент; функция цели; оптимальные оценки параметров; метод золотого сечения.

1. Введение

Тепловые изменения характеристик оптических элементов, используемых в лазерных системах инфракрасного диапазона, могут существенно влиять на качество работы таких систем. Задача оценивания параметров слабопоглощающих оптических элементов лазерных систем хорошо известна [1,2] и сохраняет свою актуальность в настоящее время.

В работе рассматривается задача оценивания показателя поглощения плоскопараллельного слабопоглощающего оптического элемента по результатам измерения температуры в области, далёкой от зоны воздействия лазерного излучения. Наряду с показателем поглощения оцениванию подлежит и коэффициент теплоотвода с граней оптического элемента во внешнюю среду. Этот коэффициент существенно зависит не только от качества плоских граней элемента, но и от состояния окружающей среды в процессе эксперимента, что делает необходимым оценивание его значения совместно со значением показателя поглощения [3].

Взаимосвязь между оцениваемыми параметрами и измеряемыми температурами определяется нелинейным уравнением теплопроводности [4]. Для оценивания параметров использован среднеквадратический критерий качества, исследование которого показало, что в плоскости оцениваемых параметров имеется криволинейный овраг с волнистыми склонами. Последнее существенно снижает эффективность использования классических градиентных и поисковых алгоритмов оптимизации.

Предложенный в работе алгоритм расчёта оптимальных оценок параметров основан на применении одномерного метода золотого сечения в варианте, отличном от покоординатного спуска, оказывающегося крайне неэффективным. В предложенном алгоритме применение метода золотого сечения по одному из параметров позволяет осуществлять спуск на дно оврага. Использование метода золотого сечения по второму параметру направлено на оптимизацию вдоль дна оврага.

2. Математическая модель теплового процесса

Рассматриваемый термодинамический процесс возникает в оптическом элементе под воздействием инфракрасного лазерного излучения в установке, схематически представленной на рис. 1.

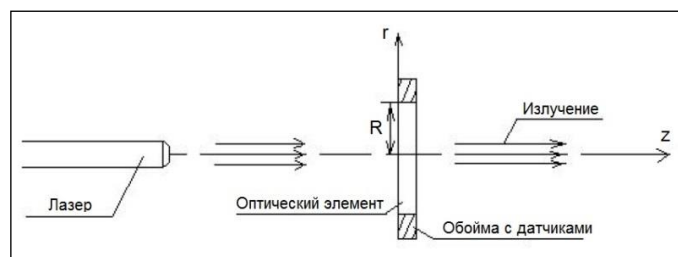


Рис. 1. Схема экспериментальной установки.

Термодинамический процесс описывается следующей системой соотношений [4]:

$$\begin{cases} c \frac{\partial u}{\partial t} = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2\alpha}{kl} u \right] + \frac{A(u)}{l} I(r), & 0 < r \leq R, 0 \leq t \leq T; \\ c \frac{\partial u}{\partial t} = k \left[2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2\alpha}{kl} u \right] + \frac{A(u)}{l} I(r), & r = 0, 0 \leq t \leq T; \\ u|_{t=0} = 0, & 0 \leq r \leq R; \\ \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = 0, & 0 \leq t \leq T; \end{cases} \quad (1)$$

где $u = u(r, t)$ – превышение температуры оптического элемента над температурой окружающей среды, α – коэффициент теплообмена между гранями оптической пластины и окружающей средой, c – объёмная теплоёмкость материала диска, k – коэффициент теплопроводности, l – толщина диска, R – радиус диска, T – длина временного интервала, на котором производятся измерения температуры, $I(r)$ – интенсивность излучения лазера, $A(u)$ – функция поглощательной способности, задаваемая формулой [4]:

$$A(u) = \bar{A}(n(u), l(u)) = 4\chi k_{\text{ев}} l \frac{1+n^2}{4n^2 + (1-n^2)^2 \sin^2 \xi} \left[1 + 2\chi k_{\text{ев}} l \frac{(1-n^2)^2 \sin^2 \xi - 2(1-n^4)}{(1+n^2)(4n^2 + (1-n^2)^2 \sin^2 \xi)} \right],$$

где χ – показатель поглощения материала пластины, $k_{\text{ев}} = 2\pi n/\lambda$ – волновое число, λ – длина волны излучения, $\xi = k_{\text{ев}} l$ – аргумент синуса, $n = n_0 + \alpha_n u$, $l = l_0(1 + \alpha_l u)$, n_0 , l_0 – значения коэффициента преломления и толщины пластины, соответственно, до начала эксперимента, α_n , α_l – коэффициенты теплового изменения показателя преломления и теплового расширения соответственно.

Особенностью этой математической модели является нелинейность уравнения теплопроводности, которая связана с «интерференционными эффектами» [1], возникающими в результате прохождения лазерного излучения через плоскопараллельный оптический элемент.

Для численного решения нелинейной краевой задачи (1) была использована неявная разностная схема [5] на равномерной сетке с узлами (r_i, t_k) , где $r_i = ih_r$, $i = 0, \dots, I$, $t_k = kh_t$, $k = 0, \dots, K$, I – количество разбиений по радиусу, $h_r = R/I$ – шаг разбиения по радиусу, K – количество интервалов дробления по времени, $h_t = T/K$ – шаг разбиения по времени. Неявная схема имеет следующий вид, где u_i^k – точное решение разностной задачи в узле (i, k) :

$$\begin{cases} c \frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{h_t} = k \left[\frac{1}{ih_r} \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h_r} + \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_r^2} - \frac{2\alpha}{kl} u_i^k \right] + \frac{1}{l} A(u_i^k) I(ih_r), & i = \overline{1, I}, k = \overline{1, K}; \\ c \frac{u_0^k - u_0^{k-1}}{h_t} = k \left[2 \frac{2u_1^k - 2u_0^k}{h_r^2} - \frac{2\alpha}{kl} u_0^k \right] + \frac{1}{l} A(u_0^k) I(0), & k = \overline{1, K}; \\ u_i^0 = 0, & i = \overline{0, I}; \\ \frac{u_{I+1}^k - u_{I-1}^k}{2h_r} = 0, & k = \overline{0, K}. \end{cases} \quad (2)$$

Схема (2) аппроксимирует исходную задачу (1) с погрешностью $O(h_r, h_t^2)$ и является устойчивой [5]. Следовательно, на основании теоремы о сходимости можно говорить, что рассчитываемое с помощью этой схемы разностное решение сходится к решению исходной задачи. Исследование методической погрешности разностного метода проведено в работе [5], где была установлена связь между уровнем погрешности и шагами дискретизации. Графики решения задачи (1), полученные с помощью схемы (2) представлены на рис. 2. Расчёты были проведены на разностной сетке при $I = 64$ и $K = 3000$. Вычисления проводились на тестовом примере при следующих значениях параметров: $R = 3$ см, $T = 30$ °С, $l = 1$ см, $P = 30$ Вт, $a = 0,6$ см, $k = 0,59$ [Вт/см·К], $c = 1,65$ [Дж/см³·К], $\alpha^* = 5 \cdot 10^{-3}$ [Вт/см²·К]. Для расчёта поглощательной способности были использованы значения параметров, соответствующие элементу, выполненному из германия.

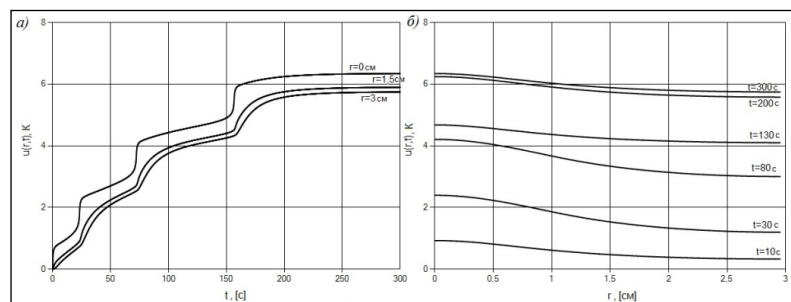


Рис. 2. Графики решения уравнения теплопроводности в зависимости от а) времени и б) радиуса.

3. Критерий оптимальности оценивания

Для расчёта параметров α и χ уравнения теплопроводности используются измерения теплового поля на периферии оптического элемента, то есть при $r = R$, поскольку в этой зоне отсутствует лазерное излучение. Предполагалось, что после включения лазера в течение времени T производится регистрация температуры с помощью тепловых датчиков, размещённых на поверхности $r = R$ оптической пластины.

В качестве критерия оптимальности оценок параметров использовался следующий среднеквадратический критерий качества:

$$G(\alpha, \chi) = \frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q (u(R, t_q, \alpha, \chi) - v_q)^2 \rightarrow \min_{\alpha, \chi},$$

где $u(R, t_q, \alpha, \chi)$ – решение задачи (1) в моменты времени t_q при некоторых значениях параметров α и χ ,

α и χ – оцениваемые параметры, v_q – результаты измерения температуры элемента в моменты времени t_q , $q = \overline{1, Q}$.

Связь между результатами измерений температуры v_q и фактическими значениями параметров α^* и χ^* оптического элемента задавалась соотношением:

$$v_q = u(R, t_q, \alpha^*, \chi^*) + \eta_q, \quad q = \overline{1, Q},$$

где η_q – шум измерений.

При проведении вычислительных экспериментов по оцениванию параметров α и χ в качестве «измерений» v_q брались результаты расчёта теплового поля при значениях параметров $\alpha^* = 0,005$ и $\chi^* = 8,5 \cdot 10^{-6}$ с добавлением гауссова шума. Предварительно было проведено исследование функции $G(\alpha, \chi)$ методом сечений плоскостями $\alpha = const$, типичные результаты которого представлены на рис. 3 и 4. Исследование показало, что функция $G(\alpha, \chi)$ в плоскости параметров α и χ имеет криволинейный овраг (рис. 4) с волнистыми склонами (рис. 3). Графики построены по 100 измерениям, полученных в течение первых пяти минут нагрева диска.

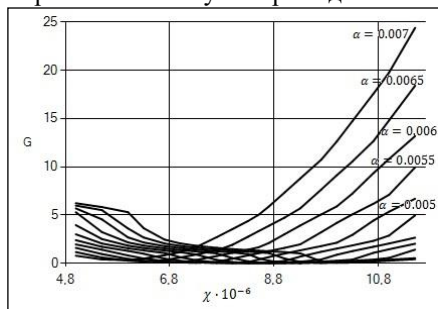


Рис. 3. Графики сечений функции цели $G(\alpha, \chi)$ плоскостями $\alpha = const$.

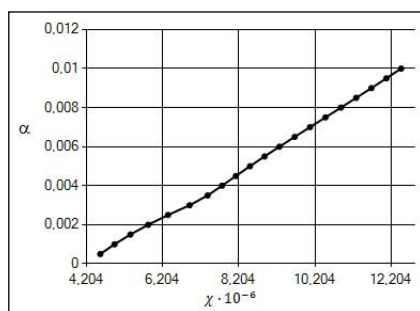


Рис. 4. График дна оврага функции $G(\alpha, \chi)$.

Линия дна криволинейного оврага, представленная на рис. 4, получена путём спуска в овраг вдоль сечений по параметру α . Каждая точка на этой линии – это результат минимизации функции $G(\alpha, \chi)$ с помощью одномерного метода золотого сечения для некоторого фиксированного значения α .

4. Описание алгоритма оценивания значений параметров уравнения

Для реализации алгоритма оценивания был выбран метод золотого сечения. Этот метод является одним из простейших вычислительных методов при решении задач оптимизации, причём весьма эффективным, который при ограниченном количестве вычислений значений целевой функции обеспечивает достижение высокой точности [6].

Алгоритм поиска оптимальных значений параметров уравнения теплопроводности является адаптацией одномерного метода золотого сечения к задаче двумерной оптимизации. Оптимальные значения оцениваемых коэффициентов ищутся как по одной, так и по другой переменной, однако здесь не идёт речь о классической по координатной оптимизации. Сначала по правилу золотого сечения выбираются точки на оси α без вычисления значений критерия качества. Затем для каждой точки на оси α по одномерному методу золотого сечения осуществляется спуск на дно оврага функции $G(\alpha, \chi)$. При этом оптимизация проводится по параметру χ с использованием опять же одномерного метода золотого сечения. В полученных таким образом точках на дне оврага вычисляются значения критерия $G(\alpha, \chi)$. В результате сравнения этих значений производится сужение интервалов неопределённости вдоль линии дна оврага и, следовательно, одновременно происходит сужение интервалов неопределённости как по параметру α , так и по параметру χ . При спуске в овраг по параметру χ остановка процесса спуска происходит при выполнении условия $(\chi_2 - \chi_1)/\chi_{cp} \leq \varepsilon_\chi$, где χ_1 и χ_2 – левая и правая границы последнего интервала неопределённости по параметру χ , а $\chi_{cp} = (\chi_1 + \chi_2)/2$. Остановка алгоритма происходит при выполнении условия $(\alpha_2 - \alpha_1)/\alpha_{cp} \leq \varepsilon_\alpha$, где α_1 , α_2 и α_{cp} имеют смысл аналогичный соответствующим обозначениям для параметра χ .

Типичные результаты работы описанного алгоритма с незашумлёнными измерениями представлены на рис. 5, где для нахождения значений оптимальных оценок параметров были взяты величины $\varepsilon_\alpha = 10^{-4}$ и $\varepsilon_\chi = 10^{-5}$, использующиеся для остановки процесса оптимизации.

На рис. 5 на графиках треугольниками изображены границы сужающихся интервалов неопределённости, которые расположены на линии дна оврага. Видно, что в процессе оптимизации происходит приближение этих границ к точке (α^*, χ^*) , характеризующей точные значения оцениваемых параметров.

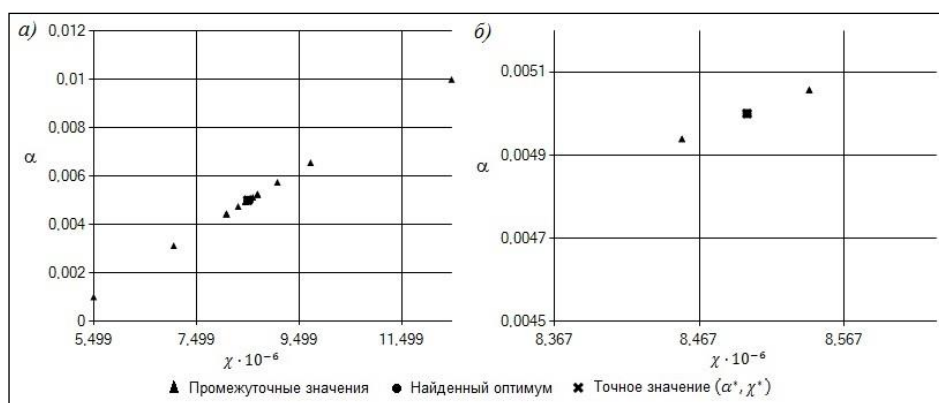


Рис. 5. Графики работы алгоритма: а) результат оптимизации вдоль линии оврага, б) укрупнение окрестности точки оптимума.

5. Заключение

Разработан и программно реализован алгоритм вычисления оптимальных оценок параметров χ и α уравнения теплопроводности, описывающего термодинамический процесс в оптическом элементе, по значениям температуры в периферийной области элемента. Проведение серии вычислительных экспериментов показало надёжную работу предложенного алгоритма, позволяющего вычислять с высокой точностью значения параметров χ и α . Например, при отсутствии шума измерений различие между вычисленными значениями оценок параметров χ и α и точными значениями χ^* и α^* не превосходили 0,0002 % и 0,0009% соответственно.

Литература

- [1] Карлов, Н.В. Интерференционные эффекты при изменении коэффициентов поглощения прозрачных материалов / Н.В. Карлов, Г.П. Кузьмин, Е.В. Сисакян // Квантовая электроника. – 1977. – Т. 4, №8. – С. 1816-1818.
- [2] Карлов, Н.В. Динамический метод измерения коэффициента поглощения прозрачных материалов / Н.В. Карлов, Н.А. Кириченко, Б.С. Лукьянчук, Е.В. Сисакян // Квантовая электроника. – 1980. – Т. 7. – С. 1531-1536.
- [3] Дегтярев, А.А. Модифицированный лазерный калориметрический метод автоматизированного измерения малых оптических потерь / А.А. Дегтярев, Е.В. Сисакян, В.А. Соيفер // Препринт ИОФАИ СССР. – 1985. – №51. – 46 с.
- [4] Дегтярев, А.А. Применение метода вычислительного эксперимента для исследования влияния параметров правой части нелинейного уравнения теплопроводности на его решение / А.А. Дегтярев, М.В. Силакова // Международная конференция с элементами научной школы для молодёжи (ПИТ-2010), 29.09-01.10.2010 г., Самара, СГАУ, 2010 г., С. 410-414.
- [5] Дегтярев, А.А. Исследование методической погрешности разностного решения нелинейного уравнения теплопроводности / А.А. Дегтярев, Т.В. Трушевская // Материалы Международной конференции молодёжной школы «Информационные технологии и нанотехнологии», 17.05-19.05.2016 г., Самара, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 2016 г., С. 839-843.
- [6] Турчак, Л.И. Основы численных методов: учебное пособие / М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 320 с.