

# Алгоритм разреженного представления в задаче устранения шумов на изображениях

Д.В. Архипова

Самарский национальный исследовательский университет  
им. академика С.П. Королева  
Самара, Россия  
mazyaikinadasha@gmail.com

Е.В. Гошин

Самарский национальный исследовательский университет  
им. академика С.П. Королева  
Самара, Россия  
goshine@ssau.ru

**Аннотация**— Настоящая статья посвящена исследованию восстановления изображений с использованием разреженного представления. Разреженное представление представляет собой описание изображения в форме коэффициентов для фрагментов, выбранных из заранее заданного словаря. В настоящей статье предлагается авторская интерпретация общего подхода к восстановлению изображений с использованием разреженного представления и приводятся результаты экспериментов для одной из реализаций этого подхода.

**Ключевые слова**— устранение шумов, разреженное представление, поиск совпадения

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Задача устранения шумов на изображениях является классической проблемой обработки изображений. Тем не менее, устранение шумов считается сложной и открытой задачей. Основная причина этого заключается в том, что с математической точки зрения устранение шумов является обратной задачей и ее решение не единственно.

К настоящему времени исследователи уже предложили различные методы уменьшения шума. Каждый метод имеет свои преимущества и недостатки.

Методы пространственной области направлены на удаление шума путем вычисления значения серого для каждого пикселя на основе корреляции между пикселями/областями изображения в исходном изображении. В общем, методы пространственной области можно разделить на две категории: фильтрация в пространственной области [1] и методы вариационного шумоподавления [2]. К методам пространственной области относят: вариационные методы шумоподавления, разреженное представление, аппроксимация низкого ранга и т. д.

Методы шумоподавления изображения постепенно развивались от первоначальных методов пространственной области до современных методов в некотором новом пространстве, формируемом после преобразования. Первоначально такие методы были разработаны для преобразования Фурье [3]. Ключевая идея таких методов заключается в том, что характеристики преобразованных изображения и шума различны.

Рассмотренные выше методы вариационного шумоподавления относятся к схемам оптимизации на основе моделей, которые находят оптимальные решения

для восстановления изображения с шумоподавлением. Напротив, методы шумоподавления на основе CNN [4] пытаются оценить функцию отображения, оптимизируя функцию потерь на обучающем наборе, содержащем пары чистых и зашумлённых изображений.

В последние годы наблюдается рост интереса к устранению шумов на основе разреженного представления сигналов. Идея таких методов заключается в представлении каждого фрагмента изображения в виде линейной комбинации нескольких фрагментов сверхполного словаря.

В настоящей работе будет предложена авторская интерпретация подхода к восстановлению изображений с использованием разреженного представления.

## 2. ТРАДИЦИОННЫЕ ПОДХОДЫ

Математически задачу устранения шумов можно смоделировать следующим образом. Пусть изображение формируется в виде:  $y = x + n$ , где  $y$  — наблюдаемое зашумленное изображение,  $x$  — неизвестное исходное изображение, а  $n$  — аддитивный белый гауссовский шум.

Одним из наиболее распространённых подходов к восстановлению исходного изображения является байесовское оценивание. Этот подход может быть сформулирован в форме задачи минимизации функции:

$$f(x) = \frac{1}{2} \|\hat{x} - y\|_2^2 + G(x),$$

где  $\hat{x}$  — оценка исходного изображения, а  $G(x)$  — штрафная функция гладкости, задаваемая из некоторых априорных соображений.

Другой подход, имеющий ценность в рамках настоящей работы, основан на применении некоторого фильтра (как правило, фильтра низких частот) после преобразования Фурье и может быть записан как последовательность преобразований:

$$\hat{x} = F^{-1}(G(F(y))),$$

где  $F(\cdot)$  и  $F^{-1}(\cdot)$  — прямое и обратное преобразование Фурье, соответственно.

## 3. РАЗРЕЖЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

В настоящем исследовании в качестве основы для разработки был использован алгоритм, использующий разреженное представление изображений.

Разреженное представление представляет процесс шумоподавления в следующей форме:

$$f(x) = \frac{1}{2} \|x - y\|_2^2 + \sum_{j=1}^K |a_j|^p, x = Da$$

где  $D$  – словарь (матрица) размером  $N \times K$ .  $N$  – размерность сигнала, который мы собираемся моделировать.  $K$  – размер словаря,  $a$  – вектор с малым числом ненулевых элементов.

Традиционно, решение задачи восстановления изображений с помощью разреженного представления формулируется следующим образом.

Каждый фрагмент изображения может быть представлен как линейная комбинация нескольких фрагментов из избыточного словаря  $D$ . Оценка MAP для шумоподавления этого фрагмента изображения для известного словаря строится путем решения выражения:

$$\hat{a} = \|a\|_0, \|Da - y\|_2^2 \leq T_0.$$

Нахождение наилучшего словаря для представления данных  $\{y_i\}_{i=1}^N$  в виде разреженного представления осуществляется с помощью поиска минимума следующего выражения

$$\{\|Y - Da\|_F^2\}, \forall i \|a_i\|_0 \leq T_0.$$

Здесь  $T_0$  – фиксированное количество ненулевых записей, а обозначение  $\|a\|_F$  обозначает Евклидову норму.

#### 4. ПРЕДЛАГАЕМЫЙ ПОДХОД

Рассмотренный выше традиционный подход не лишён недостатков. В частности, он требует одновременного решения задачи вычисления разреженного представления и минимизации априорного члена.

В настоящей работе предлагается подход, аналогичный устранению шумов, основанному на преобразовании Фурье.

Пусть  $J(y, D)$  – обратимое точное разреженное представление изображения, то есть выполняется условие:

$$y = J^{-1}(J(y, D), D).$$

Рассмотрим класс преобразований разреженных представлений  $G(\cdot)$  и сформулируем процедуру восстановления изображений в виде

$$\hat{x} = J^{-1}(G(J(y, D))).$$

В качестве простейшей реализации этого подхода по аналогии с традиционным подходом зададим функцию  $G(\cdot)$  как ограничение на максимальное число ненулевых коэффициентов разреженного представления. Таким образом,  $T_0$  наибольших коэффициентов сохраняется без изменения, а остальные – обнуляются.

#### 5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

В работе было проведено экспериментальное исследование с целью демонстрации преимуществ разреженного представления по сравнению с двумя рассмотренными подходами. Помимо этого, было

показано, что предложенный подход к использованию разреженного представления незначительно влияет на результат восстановления, вместе с тем открывая простор для выбора различных видов фильтрующих функций в пространстве коэффициентов разреженного представления.

В качестве алгоритмов для вычисления разреженного представления использован ортонормированный поиск совпадений из-за его простоты и эффективности.

Полученные изображения и сравнительная таблица результатов представлены ниже. Для сравнения качества восстановления изображения во всех вышеописанных случаях было использовано значение PSNR.



Рис. 1. (а) зашумленное изображение, (б) изображение, восстановленное с помощью разреженного представления, (в) изображение, восстановленное с помощью преобразования Фурье, (г) изображение, восстановленное с помощью байесовского подхода

Таблица I.

ЗНАЧЕНИЯ PSNR

Метода	σ		
	15	25	50
Разреженное представление	34,78	33,39	31,42
Преобразование Фурье	28,59	27,89	25,52
Байесовское оценивание	26,12	24,06	22,79

#### 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается влияние степени зашумленности исходного изображения на результат восстановления, получаемый при помощи разреженного представления.

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания по теме 0777-2020-0017 и программы «Приоритет-2030».

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Wiener, N. Extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series: with engineering applications / N. Wiener. – Cambridge: MIT Press, 1949. – P. 174.
- [2] Katsaggelos, A.K. Digital image restoration / A.K. Katsaggelos // IEEE Signal Processing Magazine. – 2012. – Vol. 14. – P. 24-41.
- [3] Gopinathan, S. Wavelet and FFT Based Image Denoising Using Non-linear Filters / S. Gopinathan, R. Kokila // International Journal of Electrical and Computer Engineering. – 2015. – Vol. 5. – P. 1018-1026.
- [4] Chen, Y.Y. Trainable nonlinear reaction diffusion: a flexible framework for fast and effective image restoration / Y.Y.Chen, T. Pock // IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell. – 2017. – Vol. 39(6). – P. 1256-1272.
- [5] Gorodnitsky, I.F. Sparse signal reconstruction from limited data using FOCUSS: A re-weighted norm minimization algorithm / I.F. Gorodnitsky, B.D. Rao // IEEE Trans. Signal Process. – 1997. – Vol. 45. – P. 600-616.
- [6] Lewicki, M.S. A probabilistic framework for the adaptation and comparison of image codes / M.S. Lewicki, B.A. Olshausen // J. Opt. Soc. Amer. A: Opt., Image Sci. Vision. – 1999. – Vol. 16. – P. 1587-1601.
- [7] Myasnikov, V.V. Reconstruction of functions and digital images using sign representations / V.V. Myasnikov // Computer Optics. – 2019. – Vol. 43(6). – P. 1041-1052. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-6-1041-1052.