

## Аналитические свойства расширенных пучков Эйри

А.В. Устинов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт систем обработки изображений РАН - филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Молодогвардейская 151, Самара, Россия, 443001

<sup>2</sup>Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

**Аннотация.** Наличие у классических пучков Эйри ряда широко используемых свойств, в частности, самофокусировки подводит к мысли о полезности модификации этих пучков. Известно несколько обобщений функции Эйри как на основе модификации дифференциального уравнения, так и вариаций в интегральном представлении.

В докладе теоретически и численно исследован ещё один тип расширенных функций Эйри, построенный на обобщении интегрального представления в широком диапазоне нецелых значений степени. Основное внимание в докладе уделяется получению приближённо-аналитических представлений для расширенных функций Эйри при произвольном показателе.

На основе введённых функций формируется новый тип самофокусирующихся пучков. Расширенные пучки Эйри получаются, если во входной плоскости оптической схемы поместить дифракционный оптический элемент, называемый обобщённой линзой. Численное исследование их свойств выполнено с использованием дробного преобразования Фурье.

### 1. Введение

Волновые пакеты Эйри, рассмотренные в конце семидесятых годов прошлого века в контексте квантовой механики [1] как волновые объекты, распространяющиеся по изогнутой траектории, привлекли в последнее время повышенный интерес учёных-оптиков. Интерес возник в связи с успешной физической генерацией «ускоряющихся» лазерных пучков [2], согласованных с функциями Эйри. Особенности свойства пучков Эйри были использованы во многих приложениях [3], включая оптическое манипулирование [4, 5].

Функции Эйри являются бесконечно протяжёнными и не обладают конечной энергией, поэтому для их физической реализации требуется усечение. В [2] были рассмотрены пучки Эйри с конечной энергией, представляющие собой произведение классической моды Эйри и экспоненциальной функции. Хотя умножение на гауссову или экспоненциальную функцию позволяет достаточно просто формировать такие пучки с помощью пространственного модулятора света, в обоих случаях формируемые пучки фактически перестают быть бездифракционными, хотя приблизительно сохраняют свой вид до некоторого расстояния.

В работе [6] был рассмотрен иной способ усечения бесконечной моды Эйри – с помощью прямоугольной апертуры, отсекающей функцию в положительной части аргумента при спадании её практически до нуля, а в отрицательной части – до  $n$ -го нуля. В [6] проводилось

сравнение степени расходимости трёх типов усечённых пучков Эйри: экспоненциальных, гауссовых и ограниченных диафрагмой – и было численно показано, что в последнем случае осциллирующая структура пучка и чётко выделенный максимум интенсивности сохраняется гораздо дольше, чем в двух первых.

Среди других бездифракционных мод пучки Эйри выделяются особым свойством «ускорения», которое при распространении в свободном пространстве проявляется как отклонение от прямолинейной траектории по параболическому закону [2, 7, 8].

В работе [9] было рассмотрено обобщённое семейство двумерных «ускоряющихся» пучков на основе пучков Эйри и параболических пучков. В этом случае двумерный пучок представляется как произведение одномерного пучка Эйри (или параболического) и любого другого одномерного распределения. В работе [10] был рассмотрен новый тип пучков Эйри, сформированных в фокальной плоскости линзы при дифракции на круглой апертуре сферической волны, модифицированной кубической фазой. Такие пучки долго сохраняют хорошо выраженный максимальный пик, распространяющийся по параболической траектории.

Хотя пучки Эйри являются решением параксиального волнового уравнения, всё чаще рассматривается их распространение в условиях широких углов расходимости и даже в зоне затухающих волн [11, 12].

Таким образом, проведенный обзор свойств и применений пучков Эйри показывает их многофункциональность и высокую востребованность. Данный факт стимулирует ученых к поискам новых модификаций и обобщений классических функций Эйри.

Известно несколько обобщений функций Эйри как на основе модификации дифференциального уравнения [13, 14], так и вариаций в интегральном представлении [15-20].

В данной работе мы предлагаем ещё одно расширение пучков Эйри. Из известных обобщений ближе всего к предлагаемому нами расширению являются варианты из [15, 16, 19], но мы рассматриваем более широкий диапазон степенной зависимости аргумента, включая нецелые значения степени.

## 2. Обобщённые функции Эйри

Прежде чем перейти к описанию и анализу нового расширения пучков Эйри, перечислим кратко известные обобщения.

Одним из способов обобщения является модификация дифференциального уравнения классического уравнения Эйри  $\frac{d^2u}{dz^2} - zu = 0$ . В частности, в работе [13] вместо него рассмотрено

дифференциальное уравнение вида  $\frac{d^2u}{dz^2} - z^n u = 0$ , в котором  $n$  – положительное целое число. В

статье [14] дано ещё одно обобщение на основе аналогичного изменения:  $\frac{d^2u}{dz^2} - z^\alpha u = 0$ , где  $\alpha > -2$  - число не обязательно целое, но введено ограничение  $z > 0$ .

Другой тип обобщения рассмотрен Ф. Олвером в [15]. Функция Олвера определяется следующим интегральным выражением  $O_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(a(i\lambda)^{m+3} + i\lambda x) d\lambda$ , в котором  $m$  – целое

неотрицательное и  $|a| = (m+3)^{-1}$ . Классическая функция Эйри является частным случаем при  $m=0$ . В статье [16] на основе функций Олвера введён новый класс бездифракционных пучков.

Есть и другие обобщения интегрального представления функции Эйри. В работах [17, 18] были введены функции, представленные в виде контурных интегралов. При частных значениях параметров они равны функции Эйри, или выражаются через неё. В [19] приведены таблицы нескольких функций, в том числе:  $Ai_{p,q}(\alpha, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{iy^p}{p} - \frac{\alpha y^q}{q} + ixy\right) dy$ . Здесь  $\alpha \geq 0$ ,  $x$  - действительное число,  $p$  и  $q$  – натуральные числа такие, что  $q$  чётное, а  $p$  нечётное и  $p \geq 3$ . В

частных случаях имеется связь с классической функцией Эйри:  $Ai_{3,q}(0, x) = Ai(x)$ ,  $Ai_{3,2}(\alpha, x) = \exp(\alpha x / 2) Ai(x + \alpha^2 / 4)$ . В работе [20] проведено исследование функции, которая с точностью до обозначений совпадает с одной из функций, введённых в [19].

Более подробное описание известных обобщений дано в статье [21], здесь же больше внимания уделяется аналитическим свойствам рассматриваемых функций.

### 3. Новый тип расширенных функций Эйри

Рассмотрим новый тип расширения функции Эйри на основе интегрального представления:

$$Fr_{\gamma}(\omega) = \int_{-D/2}^{D/2} \exp[-i(k\alpha_0)^{\gamma} \cdot \text{symm}(x^{\gamma}) - ik\omega x] dx, \tag{1}$$

соответствующего одномерному преобразованию Фурье в конечных пределах от функции обобщённой линзы или дробного аксикона [22, 23].  $\text{symm}(x^{\gamma})$  - оператор симметризации, применяемый к выражению  $x^{\gamma}$ , чтобы оно имело смысл при отрицательном  $x$  и нецелом  $\gamma$ . При чётной симметризации при  $x < 0$  используем  $|x|^{\gamma}$ , а при нечётной  $-|x|^{\gamma}$ . Далее мы используем нечётную симметризацию, так как при нечётном  $\gamma$  она совпадает с исходным  $x^{\gamma}$ . Последнее важно при сравнении с классической функцией Эйри.

Выражение (1) близко к рассмотренному в [19], но здесь используется более широкий диапазон степеней  $\gamma$ , включая нецелые значения. При отрицательном  $x$  предполагается использовать чётную либо нечётную симметризацию.

Рассмотрим случай, когда пределы являются бесконечными или с достаточной точностью могут быть заменены бесконечными, что допустимо при  $\gamma > 1$ . После применения нечётной симметризации получаем следующую формулу:

$$Fr_{\gamma}^{odd}(\omega) = \int_0^{\infty} \exp[-i(k\alpha_0 x)^{\gamma} - ik\omega x] dx + \int_0^{\infty} \exp[i(k\alpha_0 x)^{\gamma} + ik\omega x] dx = 2 \int_0^{\infty} \cos[(k\alpha_0 x)^{\gamma} + k\omega x] dx. \tag{2}$$

Показатели экспоненты в обоих интегралах отличаются только знаком, что упростит расчёты. (Этого нет при чётной симметризации, когда результат имеет более сложный вид.)

В частном случае при  $\gamma=3$  имеем:  $Fr_{\gamma=3}^{odd}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i(k\alpha_0 x)^3 - ik\omega x] dx$ . Этот интеграл можно вычислить, используя таблицы [24], и он равен

$$Fr_{\gamma=3}^{odd}(\omega) = \frac{2\pi}{k(3\alpha_0)^{3/2}} \begin{cases} \sqrt{\omega} \cdot \left[ I_{-1/3} \left( 2 \left( \frac{\omega}{3\alpha_0} \right)^{3/2} \right) - I_{1/3} \left( 2 \left( \frac{\omega}{3\alpha_0} \right)^{3/2} \right) \right], & \omega > 0, \\ \sqrt{-\omega} \cdot \left[ J_{-1/3} \left( 2 \left( \frac{-\omega}{3\alpha_0} \right)^{3/2} \right) + J_{1/3} \left( 2 \left( \frac{-\omega}{3\alpha_0} \right)^{3/2} \right) \right], & \omega \leq 0. \end{cases} \tag{3}$$

Этот результат можно записать через классическую функцию Эйри:

$$Fr_{\gamma=3}^{odd}(\omega) = \frac{2\pi}{\sqrt[3]{3}k\alpha_0} Ai \left( \frac{\omega}{\sqrt[3]{3}\alpha_0} \right). \tag{4}$$

Для общего вида (2) точное решение найти невозможно, но можно получить асимптотическое представление при больших значениях аргумента.

Если для вычисления каждого из двух интегралов в (2) использовать метод стационарной фазы [25], то получим:

$$2 \int_0^{\infty} \cos g(x) dx \approx \sqrt{\frac{8\pi}{g''(x_0)}} \cos(g(x_0) + \pi / 4), \tag{5}$$

где  $x_0$  - стационарная точка. Используем для данной функции  $g(x)$  общую формулу (5). Производные равны  $g'(x) = (k\alpha_0)^{\gamma} \gamma x^{\gamma-1} + k\omega$ ;  $g''(x) = (k\alpha_0)^{\gamma} \gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2}$ . Пусть значение  $\omega$  отрицательное (положительные рассматриваются ниже). Тогда имеем следующие выражения ( $\omega_1 = -\omega$ ):

$$x_0 = \frac{1}{k} \left( \frac{\omega_1}{\gamma \alpha_0^\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}; g(x_0) = \omega_1 \left( \frac{\omega_1}{\gamma \alpha_0^\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \frac{1-\gamma}{\gamma}; g''(x_0) = k^2 \omega_1 (\gamma-1) \left( \frac{\omega_1}{\gamma \alpha_0^\gamma} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad (6)$$

Подставив (6) в (5), получим, что при большом по модулю отрицательном  $\omega$  имеет место приближение

$$\text{Fr}_\gamma^{\text{odd}}(\omega < 0) \approx \frac{2}{k} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma-1}} \cdot \frac{|\omega|^{\frac{2-\gamma}{2\gamma-2}}}{\gamma^{\frac{1}{2\gamma-2}} \alpha_0^{\frac{\gamma}{2\gamma-2}}} \times \cos \left[ \left( \frac{|\omega|}{\gamma \alpha_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot (\gamma-1) - \frac{\pi}{4} \right]. \quad (7)$$

При  $\gamma=3$  выражение (7) при  $\omega \leq 0$  соответствует асимптотическому представлению функции Бесселя  $J_{1/3}(x)$ . Из выражения (7) следует, что расширенные функции Эйри при отрицательных значениях аргумента осциллируют, причём частота осцилляций растёт с увеличением абсолютного значения аргумента. С ростом параметра  $\gamma$  скорость сгущения убывает, и частота стремится к постоянной величине. Огибающая убывает как дробно-рациональная функция. Интеграл в (2) сходится при  $\gamma > 1$ , но при  $1 < \gamma \leq 2$  зависимость огибающей становится нефизической. Поэтому приближённая формула (7) применима для показателей  $\gamma > 2$  (при  $\gamma$ , близких к 2, погрешность будет велика).

Пусть теперь значение  $\omega$  большое положительное. Тогда стационарная точка равна:

$$x_0 = \frac{1}{k} \cdot \left( \frac{\omega}{\gamma \alpha_0^\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot e^{\frac{i\pi}{\gamma-1}} \quad (8)$$

Она не является вещественной, поэтому дальнейшие расчёты в определённой степени формальные. Мы взяли корень с наименьшей мнимой частью, так как возможные другие корни дадут в окончательном выражении слагаемые с более высокой скоростью убывания. По этой же причине мы не учитывали комплексные корни при  $\omega < 0$ . Значения в стационарной точке:

$$g(x_0) = \left( \frac{\omega}{\gamma \alpha_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot (\gamma-1) e^{\frac{i\pi}{\gamma-1}}; g''(x_0) = -(\gamma-1) k^2 e^{-\frac{i\pi}{\gamma-1}} \omega^{\frac{\gamma-2}{\gamma-1}} \gamma^{\frac{1}{\gamma-1}} \alpha_0^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (9)$$

Тогда второй интеграл в (2) при подстановке значений (9) равен

$$\int_0^\infty e^{ig(x)} dx \approx \sqrt{\frac{\pi}{g''(x_0)}} \cdot e^{ig(x_0)} \sqrt{2} e^{i\pi/4} = \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma-1}} e^{-i\pi/4} e^{\frac{i\pi}{2\gamma-2}} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{\omega^{\frac{2-\gamma}{2\gamma-2}}}{\gamma^{\frac{1}{2\gamma-2}} \alpha_0^{\frac{\gamma}{2\gamma-2}}} \left[ \exp \left[ i \left( \frac{\omega}{\gamma \alpha_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} (\gamma-1) \left( \cos \frac{\pi}{\gamma-1} + i \sin \frac{\pi}{\gamma-1} \right) \right] \right] \quad (10)$$

А при вычислении первого вносится два изменения – берётся симметричная стационарная точка (в отличие от (9) используется множитель  $e^{-\frac{i\pi}{\gamma-1}}$ ), а при извлечении корня из второй производной добавляется знак минус. Косвенно обосновать это можно тем, что только в этом случае получается ответ вещественный и без экспоненциального роста. В итоге первый интеграл равен

$$\int_0^\infty e^{-ig(x)} dx \approx \sqrt{\frac{\pi}{g''(x_0)}} \cdot e^{-ig(x_0)} \sqrt{2} e^{-i\pi/4} = \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma-1}} e^{+i\pi/4} e^{-\frac{i\pi}{2\gamma-2}} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{\omega^{\frac{2-\gamma}{2\gamma-2}}}{\gamma^{\frac{1}{2\gamma-2}} \alpha_0^{\frac{\gamma}{2\gamma-2}}} \left[ \exp \left[ -i \left( \frac{\omega}{\gamma \alpha_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} (\gamma-1) \left( \cos \frac{\pi}{\gamma-1} - i \sin \frac{\pi}{\gamma-1} \right) \right] \right] \quad (11)$$

Сложив эти выражения, найдём приближённую формулу

$$\text{Fr}_\gamma^{\text{odd}}(\omega > 0) \approx \frac{2}{k} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma-1}} \cdot \frac{\omega^{\frac{2-\gamma}{2\gamma-2}}}{\gamma^{\frac{1}{2\gamma-2}} \alpha_0^{\frac{\gamma}{2\gamma-2}}} \times \exp \left[ - \left( \frac{\omega}{\gamma \alpha_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot (\gamma-1) \sin \frac{\pi}{\gamma-1} \right] \cos \left[ \left( \frac{\omega}{\gamma \alpha_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot (\gamma-1) \cos \frac{\pi}{\gamma-1} + \frac{\pi}{2\gamma-2} - \frac{\pi}{4} \right]. \quad (12)$$

которая верна для  $\gamma > 2$ . Если в (3) квадратную скобку выразить через функцию  $K_{1/3}(\cdot)$  и использовать её вид при большом значении аргумента, то получим результат вдвое меньше, чем при подстановке  $\gamma=3$  в (12). Поэтому придётся сказать, что формула (12) верна с точностью до числового коэффициента.

Формула (12) показывает, что значение  $\gamma=3$ , соответствующее функции Эйри, является исключительным, так как только в этом случае  $\cos \frac{\pi}{\gamma-1} = 0$ , что означает превращение

осциллирующего множителя в константу. То есть, только классическая функция Эйри при положительном аргументе экспоненциально убывает к нулю, оставаясь положительной.

При положительных значениях аргумента расширенная функция Эйри также осциллирует, а огибающая убывает экспоненциально. Вид зависимости частоты от  $\omega$  тот же, что при отрицательном аргументе, но коэффициент другой.

Заметим, что в нуле можно получить точное выражение для (2) [24]:

$$\text{Fr}_\gamma^{\text{odd}}(\omega = 0) = \frac{2\Gamma(1/\gamma)}{\gamma k \alpha_0} \cos\left(\frac{\pi}{2\gamma}\right), \quad (13)$$

которое верно при любом  $\gamma > 1$ .

#### 4. Численное моделирование

Для получения распределение поля в любой парааксиальной области, (в зонах дифракции Френеля и Фраунгофера) можно применить дробное преобразование Фурье (ДрПФ) [26, 27]:

$$E(u, z) = \sqrt{-\frac{ik}{2\pi f \sin(\tau z)}} \exp\left\{\frac{iku^2 \cos(\tau z)}{2f \sin(\tau z)}\right\} \int_{-D/2}^{D/2} g(x) \exp\left[\frac{ikx^2 \cos(\tau z)}{2f \sin(\tau z)} - \frac{ikxu}{f \sin(\tau z)}\right] dx \quad (14)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  - длина волны излучения,  $f$  - фокусное расстояние линзы,  $\tau = \pi/(2f)$ ,  $z$  - расстояние от входной плоскости,  $D$  - размер поля во входной плоскости.

В качестве входной функции рассмотрим фазовый оптический элемент с комплексной функцией пропускания:

$$g(x) = \exp\left[-i(k\alpha_0)^\gamma \cdot \text{symm}(x^\gamma)\right]. \quad (15)$$

Такие элементы рассматривались ранее в работах [22, 23, 28, 29] и были названы обобщённой линзой (для  $\gamma > 1$ ) и дробным аксиконом (для  $0 < \gamma < 1$ ). Заметим, что элемент (15) обладает определённой фокусирующей силой не только при  $\gamma > 1$ , но и при  $0 < \gamma < 1$ . В последнем случае компактное фокальное пятно формируется в ближней зоне дифракции [29].

Анализируя подынтегральное выражение в (14) можно утверждать, что при использовании в качестве входной функции вида (15), имеющей сходящийся волновой фронт, «фокусировка» будет происходить раньше, чем  $z=f$ . В частности, при  $\gamma=2$  положение нового фокуса можно легко вычислить:

$$z_f = \frac{2f}{\pi} \arctg\left(\frac{1}{2k\alpha_0^2 f}\right). \quad (16)$$

Из (16) очевидно, что  $z_f < f$ .

Свойства расширенных пучков Эйри (1) будут зависеть не только от параметра  $\gamma$ , но и от параметра  $\alpha_0$ . Чтобы выполнить сравнительное моделирование распространения пучков Эйри при различных значениях  $\gamma$ , согласуем параметр  $\alpha_0$  по числовой апертуре оптического элемента (15) следующим образом:

$$\alpha_0 = \left(\frac{NA}{\gamma(kR)^{\gamma-1}}\right)^{1/\gamma}, \quad (17)$$

где  $R=D/2$ ,  $NA$  - заданная числовая апертура оптического элемента.

В Таблице 1 показаны картины формирования и распространения расширенных пучков Эйри (1) на расстояние двух фокусов ( $f=100$  mm) от входной плоскости при освещении оптических элементов (15) размером  $D=2$  мм излучением с длиной волны 633 нм.

Как видно из результатов в Таблице 1, от параметра  $\gamma$  существенно зависит распределение энергии между первым и остальными лепестками пучка. Первый лепесток становится преобладающим и пучок становится похож на классический пучок Эйри при  $\gamma > 2.5$ . При  $\gamma \gg 1$  расширенный пучок Эйри напоминает пучок Эйри с экспоненциальной аподизацией [2]. Кроме того, от параметра  $\gamma$  зависит характер распространения лучей (второй столбец Таблицы 1).

**Таблица 1.** Картины распространения расширенных пучков Эйри (1) при  $\gamma > 1$  для  $NA=0.02$ .

Параметры пучка	Картина распространения (амплитуда) $z \in [10 \text{ mm}, 190 \text{ mm}]$ , $x \in [-2 \text{ mm}, 1 \text{ mm}]$	Распределение интенсивности в фокальной плоскости ( $z=100 \text{ mm}$ )
$\gamma=1.5$ , $\alpha_0=0.002$		
$\gamma=2$ , $\alpha_0=0.001$		
$\gamma=2.5$ , $\alpha_0=0.0006$		
$\gamma=3$ , $\alpha_0=0.0004$		
$\gamma=6$ , $\alpha_0=0.00018$		

При  $\gamma < 2$  изначально сходящийся волновой фронт после плоскости фокусировки  $z_f$  будет расходящимся в силу квадратичной фазы функции распространения в операторе (14). Поэтому в фокальной плоскости линзы  $z=f$  картина будет менее яркой. Отметим, что в этом случае до плоскости фокусировки  $z_f$  траектория максимальной интенсивности имеет выпуклость вверх (первая строка Таблицы 1).

При  $\gamma=2$  в плоскости фокусировки  $z_f$  наблюдается наиболее выраженный максимум интенсивности. Траектории до плоскости фокусировки  $z_f$  выглядят примерно прямыми.

Для  $\gamma > 2$  траектория распространения расширенных функций Эйри имеет вид выраженного ускоряющегося пучка, аналогично классическим пучкам Эйри. При  $\gamma > 2$  у сформированного пучка расходимость из-за влияния квадратичной фазы будет меньше. В этом случае траектория максимальной интенсивности имеет выпуклость вниз вплоть до фокальной плоскости линзы (третья, четвёртая и пятая строки Таблицы 1). Отметим, что при больших  $\gamma$  центральная часть входного поля близка к плоскому пучку (фаза примерно константа), который при распространении будет иметь максимальное значение в фокальной плоскости линзы. Периферийная часть входного пучка с наибольшими вариациями фазы фокусируется очень близко к входной плоскости, поэтому данная плоскость на иллюстрации в Таблице 1 (второй столбец, пятая строка) не видна.

Результаты моделирования при  $0 < \gamma < 1$  здесь не приводим (они имеются в [21]), так как для этого диапазона пока нет теоретических результатов.

Очевидно, используя в (15) вместо экспоненциальной функции синус или косинус, можно сформировать так называемые расширенные зеркальные пучки Эйри. В Таблице 2 показаны картины формирования и распространения зеркальных пучков, полученных при использовании входной функции следующего вида:

$$g(x) = \sin \left[ (k\alpha_0)^\gamma \cdot \text{symm}(x^\gamma) \right]. \quad (18)$$

Как видно из результатов, приведённых в Таблице 2, картины распространения становятся симметричными относительно оптической оси, что связано с распространением симметричных пучков:  $\sin(x) = (\exp(ix) - \exp(-ix))/2i$ . Однако, происходит не просто симметризация амплитуды рассмотренных выше распределений, но и проявляются также интерференционные эффекты. В частности, для  $\gamma=1$  в фокальной плоскости линзы формируются не просто два симметричных пика, а два расщеплённых пика. Этот эффект для бинарного аксикона (радиальный аналог призмы) анализировался в работе [30]. Для малых значений числовой апертуры  $NA$  и больших величин  $\gamma$  (пятая и шестая строки в Таблице 2) два симметричных порядка сливаются и формируют в фокальной плоскости распределение, уже не похожее на сумму двух смещённых дробных пучков Эйри, рассмотренных выше. Таким образом, не только новый тип функций Эйри, но и их суперпозиции позволяют получить пучки с новыми свойствами.

## 5. Заключение

В докладе теоретически и численно исследован новый тип расширенных функций Эйри, построенный на обобщении интегрального представления с учётом широкого диапазона нецелых значений степени. Получено аналитическое асимптотическое представление расширенных функций Эйри, верное для любых действительных  $\gamma > 2$ .

Численное исследование свойств пучков, порождаемых такими функциями, выполнено с использованием дробного преобразования Фурье, описывающего преобразование пучков парааксиальными оптическими системами. Вид расширенных функций Эйри был получен численно в фокальной плоскости линзы. Показано, что распределение интенсивности существенно зависит от параметра  $\gamma$ : для  $\gamma > 1$  при отрицательных значениях аргумента наблюдаются заметные осцилляции, частота которых растёт как с увеличением абсолютного значения аргумента, так и с ростом параметра  $\gamma$ ; для  $\gamma < 1$  наблюдаться обратная ситуация – частота осцилляций уменьшается с увеличением абсолютного значения аргумента. Также от  $\gamma$  зависит распределение энергии между первым и остальными лепестками пучка. Первый лепесток становится превалирующим и пучок становится похож на классический пучок Эйри при  $\gamma > 2,5$ . При  $\gamma \gg 1$  расширенный пучок Эйри напоминает пучок Эйри с экспоненциальной аподизацией.

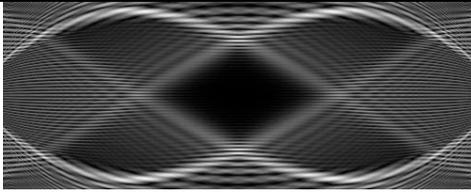
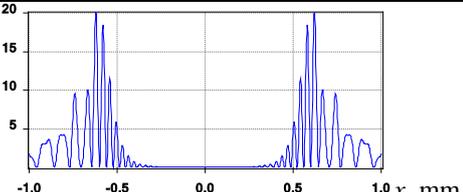
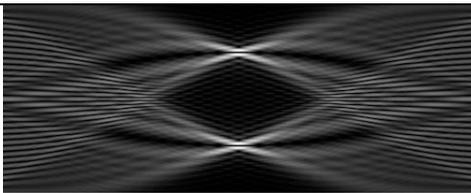
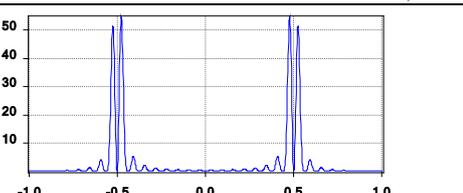
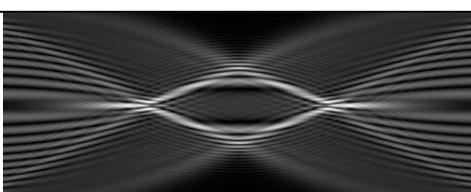
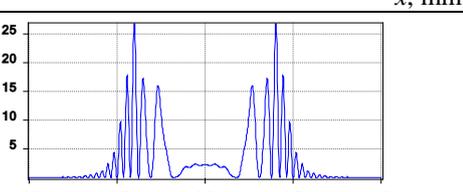
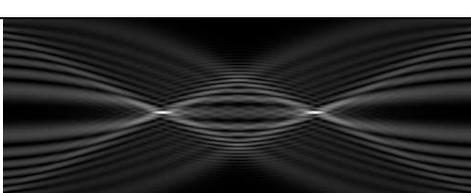
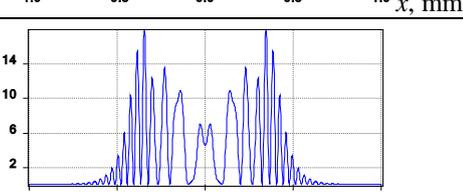
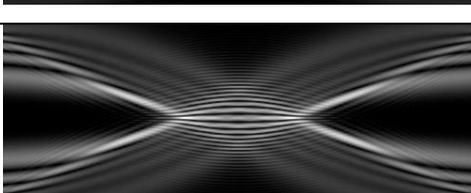
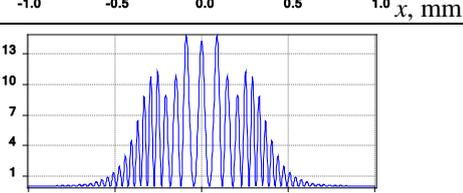
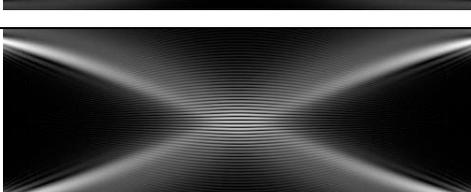
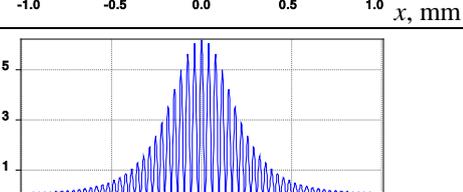
Кроме того, от параметра  $\gamma$  зависит траектория максимальной интенсивности. Для  $\gamma > 2$  траектория распространения расширенных функций Эйри имеет вид выраженного ускоряющегося пучка, аналогично классическим пучкам Эйри. Для остальных значений параметра  $\gamma$  траектория распространения имеет более сложный вид.

Симметризованные расширенные пучки Эйри демонстрируют не только зеркальное удвоение исходных пучков, но и интерференционные эффекты, в результате которых возможно получение пучков с новыми свойствами. Мы надеемся, что новые пучки окажутся полезными для методов оптического микроманипулирования и безлинзового построения шаблонов.

## 6. Благодарности

Работа выполнена при поддержке Федерального агентства научных организаций (соглашение № 007-ГЗ/ЧЗ363/26) и гранта Российского фонда фундаментальных исследований (грант 16-07-00825а).

**Таблица 2.** Картины распространения расширенных зеркальных пучков Эйри для  $NA=0.005$ .

Параметры пучка	Картина распространения (амплитуда) $z \in [10 \text{ mm}, 190 \text{ mm}], x \in [-1 \text{ mm}, 1 \text{ mm}]$	Распределение интенсивности в фокальной плоскости ( $z=100 \text{ mm}$ )
$\gamma=0.5,$ $\alpha_0=1$		
$\gamma=1,$ $\alpha_0=0.005$		
$\gamma=1.5,$ $\alpha_0=0.001$		
$\gamma=2,$ $\alpha_0=0.0005$		
$\gamma=3,$ $\alpha_0=0.00025$		
$\gamma=10,$ $\alpha_0=0.00012$		

## 7. Литература

- [1] Berry, M.V. Nonspreading wave packets / M.V. Berry, N.L. Balazs // Am. J. Phys. – 1979. – Vol. 47(3). – P. 264-267.
- [2] Siviloglou, G.A. Accelerating finite energy Airy beams / G.A. Siviloglou, D.N. Christodoulides // Opt. Letters. – 2007. – Vol. 32(8). – P. 979-981.
- [3] Vallee, O. Airy functions and applications in physics / O. Vallee, M. Soares // Imperial College Press, London, 2004. - 194 p.
- [4] Baumgartl, J. Optically mediated particle clearing using Airy wavepackets / J. Baumgartl, M. Mazilu, K. Dholakia // Nat. Photonics. – 2008. – Vol. 2. – P. 675-678.

- [5] Хонина, С.Н. Формирование лазерных пучков Эйри с помощью бинарно-кодированных дифракционных оптических элементов для манипулирования микрочастицами / С.Н. Хонина, Р.В. Скиданов, О.Ю. Моисеев // Компьютерная оптика. – 2009. – Т. 33, № 2. – С. 138-146.
- [6] Хонина, С.Н. Ограниченные 1D пучки Эйри: лазерный веер / С.Н. Хонина, С.Г. Волоотовский // Компьютерная оптика. – 2008. – Т. 32, № 2. – С. 168-174.
- [7] Besieris, I.M. A note on an accelerating finite energy Airy beam / I.M. Besieris, A.M. Shaarawi // Opt. Lett. – 2007. – Vol. 32. – P. 2447-2449.
- [8] Siviloglou, G.A. Observation of accelerating Airy beams / G.A. Siviloglou, J. Broky, A. Dogariu, D.N. Christodoulides // Phys. Rev. Lett. – 2007. – Vol. 99. – P. 213901.
- [9] Bandres, M.A. Accelerating beams / M.A. Bandres // Optics Letters. – 2009. – Vol. 34(24). – P. 3791-3793.
- [10] Carretero, L. Nonparaxial diffraction analysis of Airy and SAiry beams / L. Carretero, P. Acebal, S. Blaya, C. Garcia, A. Fimia, R. Madrigal, A. Murciano // Optics express. – 2009. – Vol. 17(25). – P. 22432-22441.
- [11] Novitsky, A.V. Nonparaxial Airy beams: role of evanescent waves / A.V. Novitsky, D.V. Novitsky // Optic Letters. – 2009. – Vol. 34(21). – P. 3430-3432.
- [12] Torre, A. Airy beams beyond the paraxial approximation / A. Torre // Optics Communications. – 2010. – Vol. 283. – P. 4146-4165.
- [13] Swanson, C.A. An extension of Airy's equation, / C.A. Swanson, V.B. Headley // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1967. – Vol. 15(6). – P. 1400-1412.
- [14] Smirnov, A.D. Tables of Airy Functions and Special Confluent Hypergeometric Functions / A.D. Smirnov // Pergamon Press, New York, 1960.
- [15] Olver, F.W.J. Connection formulas for second-order differential equations with multiple turning points / F.W.J. Olver // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 1977. – Vol. 8(1). – P. 127-154.
- [16] Belafhal, A. Theoretical introduction and generation method of a novel nondiffracting waves: Olver beams / A. Belafhal, L. Ez-zariy, S. Hennani, H. Nebdi // Optics and Photonics Journal. – 2015. – Vol. 5. – P. 234-246.
- [17] Reid, W.H. Composite approximations to the solutions of the Orr-Sommerfeld equation / W.H. Reid // Studies in Appl. Math. – 1972. – Vol. 51. – P. 341-368.
- [18] Baldwin, P. Zeros of generalized Airy functions / P. Baldwin // Mathematika. – 1985. – Vol. 32(1). – P. 104-117.
- [19] Chin, R.C.Y. A dispersion analysis for difference schemes: Tables of generalized Airy functions / R.C.Y. Chin, G.W. Hedstrom // Mathematics of computation. – 1978. – Vol. 32(144). – P. 1163-1170.
- [20] Kamimoto, J. On an integral of Hardy and Littlewood / J. Kamimoto // Kyushu J. Math. – 1998. – Vol. 52(1). – P. 249-263.
- [21] Khonina, S.N. Fractional Airy beams / S.N. Khonina, A.V. Ustinov // J. Opt. Soc. Am. A. – 2017. – Vol. 34(11). – P. 1991-1999.
- [22] Khonina, S.N. Fractional axicon as a new type of diffractive optical element with conical focal region / S.N. Khonina, A.V. Ustinov, S.G. Volotovskiy // Precision Instrument and Mechanology. – 2013. – Vol. 2(4). – P. 132-143.
- [23] Ustinov, A.V. Fracxicon as hybrid element between the parabolic lens and the linear axicon / A.V. Ustinov, S.N. Khonina // Computer Optics. – 2014. – Vol. 38(3). – P. 402-411.
- [24] Prudnikov, A.P. Integrals and Series. Vol. 1. Elementary Functions / A.P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov, O.I. Marichev // New York: Gordon & Breach Sci. Publ., 1990.
- [25] Stamnes, J.J. Waves, rays, and the method of stationary phase / J.J. Stamnes // Optics Express. – 2002. – Vol. 10(16). – P. 740-751.

- [26] Namias, V. The fractional Fourier transform and its application in quantum mechanics / V. Namias // Journal of the Institute of Mathematics and its Applications. – 1980. – Vol. 25. – P. 241-265.
- [27] Mendlovic, D. Fractional Fourier transformations and their optical implementation / D. Mendlovic, H.M. Ozaktas // J. Opt. Soc. Am. A. – 1993. – Vol. 10. – P. 1875-1881.
- [28] Устинов, А.В. Обобщённая линза: анализ осевого и поперечного распределения / А.В. Устинов, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2013. – Т. 37, № 3. – С. 307-315.
- [29] Khonina, S.N. Very compact focal spot in the near-field of the fractional axicon / S.N. Khonina, A.V. Ustinov // Optics communications. – 2017. – Vol. 391. – P. 24-29.
- [30] Khonina, S.N. Diffractive axicon with tunable fill factor for focal ring splitting / S.N. Khonina, A.P. Porfirev, A.V. Ustinov // Proc. SPIE. – 2017. – Vol. 10233. – No. 102331.

## Analytical features of extended Airy beams

A.V. Ustinov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Image Processing Systems Institute of RAS - Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS, Molodogvardejskaya street 151, Samara, Russia, 443001

<sup>2</sup>Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

**Abstract.** The presence of widely used features, in particular, the autofocusing feature, of classical Airy beams leads to a thought of a benefit of their modification. There are several generalizations of Airy function both on base of the differential equation modification and variations in the integral notion.

In the report one more type of extended Airy functions is investigated theoretically and numerically. It is constructed by generalization of the integral notion in a wide range of non-integer values of power. A principal attention in the report is devoted to obtaining of approximate analytical expressions for extended Airy functions under an arbitrary exponent.

On base of introduced functions the new type of autofocusing beams is formed. Extended Airy beams are resulted if an diffractive optical element called the generalized lens is placed in an entrance plane of the optical scheme. The numerical examination of beams features is implemented by usage of the fractional Fourier transformation.

**Keywords:** extended Airy function, generalized lens, beam trajectory, autofocusing.