

# Аналитическое и численное моделирование формирования программируемого перколяционного пути при планировании двухфазных операций

Я.А. Мостовой<sup>1</sup>, В.А. Бердников<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

**Аннотация.** Рой роботов, как система относительно простых взаимосвязанных управляемых объектов, выполняет общую задачу одновременно и распределённым образом. При планировании операций роя, связанных с созданием в зоне обслуживания сквозной фронтальной полосы из зон работы целевой аппаратуры – полезной нагрузки объектов роя, возникает задача оперативной перегруппировки роя, так как на момент планирования точная цель операции роя или ещё не определена, или представляет секрет, или определяется рядом случайных обстоятельств. Поэтому исполнение операции роя целесообразно проводить в две фазы, и первую фазу начинать ещё до разрешения упомянутых неопределённостей путем создания базовой случайной сети с относительно малой концентрации объектов роя в ней. На второй фазе операции путем локальной перегруппировки объектов роя формируется конкретный программируемый перколяционный путь, обеспечивающий целевое покрытие зонами работы целевой аппаратуры объектов роя определённой зоны обслуживания. В этом случае можно существенно сократить время проведения операции. Решение этой задачи проводится методами теории программируемой перколяции. Получены аналитические зависимости среднего количества объектов роя из стохастической основы первой фазы операции, задействованных в формируемом программируемом перколяционном пути от концентрации объектов роя в зоне обслуживания, а так же среднего количества добавленных объектов в межкластерные интервалы формируемого программируемого перколяционного пути в зависимости от концентрации. Данные зависимости подтверждены статистическим моделированием.

## 1. Введение

Одним из самых быстро развивающихся направлений робототехники на сегодняшний день является групповая робототехника подвижных объектов (или робототехника роя) [2, 3, 13, 15, 16, 22]. Рой роботов – это система взаимосвязанных роботов и по сравнению с обычным одиночным роботом имеет ряд преимуществ, наиболее значимые из которых:

- большие быстродействие и радиус действия подобной системы за счет распределения роя по всей территории зоны обслуживания;
- высокая вероятность выполнения поставленного задания за счет возможности перераспределения целей и замены вышедшего из строя робота другим из роя;
- разнообразие вариантов достижения целей системы за счет перераспределения ролей между объектами роя;

- простота решаемых каждым роботом задач при взаимодействии с множеством таких же объектов роя позволяет решать достаточно сложные вычислительные задачи.

Ряд задач роевой робототехники, связанных с созданием в зоне обслуживания сквозной фронтальной полосы, состоящей из состыкованных зон работы целевой аппаратуры – полезной нагрузки объектов роя (аппаратуры поиска, наблюдения, связи, воздействия на объекты зоны обслуживания и т.п.) можно положить на задачи рассматриваемой авторами теории программируемой перколяции, т.к. их геометрическая интерпретация – создание сквозного пути или маршрута через зону обслуживания [6, 7, 8, 9]. Также на теорию программируемой перколяции ложатся задачи передачи защищенного сигнала в большой компьютерной сети [19] и задачи моделирования и управления большой сетью наноспутников [21].

Размер квадратной ячейки матрицы, определяемой вписанной в ячейку, которая является радиусом действия целевой аппаратуры объекта роя, вытекает из геометрического смысла понятия «кластера», как образования тесного (безпропускowego) взаимодействия между объектами, размещёнными в ячейках и соприкасающимися ребрами в рамках авторской модели зоны обслуживания – матрицы.

Подобная интерпретация задачи роевой робототехники хорошо ложится на задачи теории перколяции. Теория перколяции обнаруживает сквозной «проводящий» путь – перколяционный путь, образующийся в случайной среде при росте концентрации «проводящих объектов» и достижения ею критического значения.

Классическая теория перколяции рассматривает матрицу со случайным заполнением, как модель случайной операционной среды в прямой геометрической интерпретации [5, 10, 12, 17, 23, 24, 25]. В этой квадратной матрице с числом строк  $L$  случайная часть ячеек «черная», проводящая поток жидкости или газа, транспортный поток или информационный поток, а остальные ячейки – «белые», не проводящие поток. При росте концентрации (вероятности появления) черных ячеек некоторые из них случайным образом начинают соприкасаться ребрами, что можно интерпретировать как возникновение тесного взаимодействия, и сливаться. Соприкасающиеся ребрами «черные» ячейки образуют случайные проводящие кластеры, которые образуются и растут вместе с ростом концентрации «черных» ячеек [5, 10].

В классической теории перколяции [5, 10, 23, 24, 25] ищется концентрация объектов роя в зоне обслуживания – «черных» ячеек  $p_c$  – порог стохастической перколяции, при которой образуется сквозной случайный маршрут по «черным» ячейкам через всю матрицу в заданном направлении – стохастический перколяционный кластер. Однако стохастический перколяционный кластер имеет рыхлую структуру, множество «мертвых ветвей» и явно избыточное количество объектов роя с точки зрения решения многих практических задач. В связи с этим хорошо изученная классическая теория перколяции для плоских решеток для нашей задачи не пригодна, несмотря на то что рассматриваемая задача связана с плоским геометрическим размещением объектов роя.

Поэтому авторы и развивают теорию программируемой или искусственной перколяции (не стохастической как в задачах просачивания через пористую среду). Мы не повышаем концентрацию «проводящих черных ячеек» до наступления известной для плоской решетки концентрации стохастического пробоя, а активно организуем появление сквозного перколяционного маршрута путем заполнения интервалов между появившимися на матрице небольшими кластерами, дополняющими планируемый сквозной маршрут активными объектами роя. Все это происходит на концентрации гораздо меньшей, чем концентрация стохастического пробоя (т.е. при меньшем количестве объектов роя) [20, 21].

При реализации программируемой перколяции [6, 7, 8, 9, 19, 20, 21] на первой фазе создаётся стохастическая основа из распределенных случайным образом объектов при значениях их концентрации гораздо ниже порога стохастической перколяции, а на второй фазе строится сквозной перколяционный маршрут за счет внедрения (установки) дополнительных объектов в имеющиеся межкластерные интервалы. При этом концентрация стохастической основы выбирается таким образом, чтобы суммарные затраты на двухфазную операцию были минимальны.

Обнаруженная в результате численного статистического моделирования характерная зависимость среднего числа образующихся кластеров от концентрации с максимальным значением при концентрации в районе 0.26 физически объяснима: при дальнейшем росте концентрации кластеры растут и начинают активно объединяться при этом их количество падает.

Также в ходе численного статистического моделирования были установлены зависимость от концентрации объектов средней длины пути искусственного перколяционного пробоя и зависимость от концентрации среднего числа добавленных в межкластерные интервалов объектов.

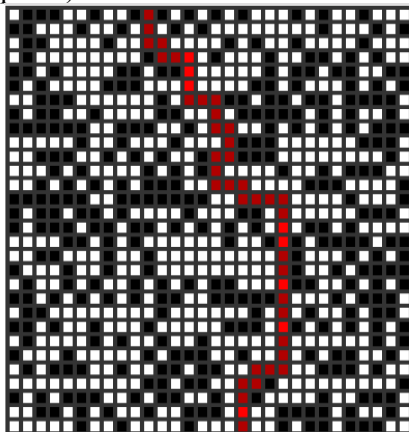
Последние факты особенно важны для следующей модели роя объектов: если черная ячейка есть прямая геометрическая интерпретация зоны передачи сигнала, то перколяционный путь будет эффективным путем передачи сигнала от одного объекта другому через систему ретрансляторов сигнала (другие агенты). Определение среднего количества агентов, необходимых для решения данной задачи, отсылает нас к операции планирования двухфазных операций. Данная статья посвящена аналитическому решению данной задачи.

## 2. Аналитическое решение задачи сетевой передачи сигнала между членами роя вдоль программируемого перколяционного пути

Для эффективной по ресурсам передачи сигнала между членами роя через сетевые ретрансляторы предлагается использовать методы двухфазных операций в теории перколяции в прямой геометрической ее интерпретации. Обозначим за  $L(p)$  – среднюю длину программируемого перколяционного пути от концентрации. Очевидно, что данная средняя длина является суммой двух других функций –  $N(p)$  и  $R(p)$  – среднего количество черных ячеек и среднего количество добавленных ячеек (далее: красных) от концентрации соответственно.

Количество ячеек в перколяционной матрице равно  $N$ , концентрация объектов на матрице равна  $p$ . Ранее [20] аналитически была получена зависимость среднего количества кластеров объектов от концентрации  $M(p) = \sum_{s=1}^N \sum_{t=t_{min_s}}^{t_{max_t}} g_{stN} p^s (1-p)^t$ , где  $p$  – концентрация,  $s$  – количество ячеек, из которых состоит кластер,  $t$  – необходимое количество пустых (белых) ячеек вокруг кластера,  $g_{stN}$  – количество различных кластеров, которые можно получить из  $s$  ячеек и с  $t$  пустыми соседними ячейками. Т.к.  $L(p) = N(p) + R(p)$ , то предлагается отдельно найти  $N(p)$  и  $R(p)$ .

Рассмотрим некоторую перколяционную матрицу, на которой построен искусственный перколяционный маршрут (см. рис.1).



**Рисунок 1.** Перколяционная матрица  $30 \times 30$  с концентрацией  $p = 0.4$  и построенным искусственным перколяционным путем.

На рисунке темно-красным обозначены черные ячейки, задействованные в перколяционном пути, ярко-красные – добавленные в программируемый перколяционный путь ячейки.

Чтобы посчитать среднее количество черных ячеек, задействованных в перколяционном пути, представим некоторую перколяционную матрицу, состоящую из одинаковых кластеров. Для этого введем понятие «зоны влияния кластера» – как некоторой площадной характеристики на перколяционной матрице. Ближайшим аналогом для «зоны влияния кластера» будут полигоны Тиссена-Вороного [26], где вместо точек – кластеры объектов.

$$\frac{N}{NM(p)} = \frac{1}{M(p)} \quad (1)$$

где  $NM(p)$  – среднее количество кластеров на матрице с числом ячеек  $N$ . Выражение 1 и будет являться «зоной влияния кластера». Аналогично найдем среднюю площадь – среднее число ячеек в кластере на такой матрице:

$$\frac{pN}{NM(p)} = \frac{p}{M(p)} \quad (2)$$

Т.е. матрица, состоящая из одинаковых кластеров, будет матрицей, состоящей из некоторого количества «зон влияния кластеров», внутри каждой из которых расположен кластер с одинаковой для всех кластеров в этой матрице средней площадью (выражение 2).

В такой матрице среднее количество черных, задействованных в перколяционном пути, можно рассматривать либо как сумму всех черных ячеек из программируемого перколяционного пути, либо как произведение среднего количества черных ячеек в некоторой средней «ширине» кластера на длину  $l$ , вдоль которой направлен перколяционный маршрут. Под средней «шириной» будем понимать среднее по всем строкам число ячеек в строке кластера перпендикулярно направлению перколяции.

За длину  $l$  можно принять то среднее количество черных ячеек матрицы  $N$ , которое находится вдоль направления распространения перколяции. В данном случае – это длина матрицы,  $L = \sqrt{N}$ , умноженная на концентрацию.

Теперь найдем эту среднюю «ширину». Для этого рассмотрим наш кластер. В общем случае кластер обладает случайной формой, но в [20] показано, что эта форма для большинства кластеров стремится к форме круга (а для конечных небольших матриц – круга Гаусса). Радиус такого круга будет:

$$\frac{p}{M(p)} = \pi r^2(p) \Rightarrow r(p) = \sqrt{\frac{p}{M(p)\pi}} \quad (3)$$

Отсюда очевидна средняя высота кластера как  $2r(p)$  – максимальная длина в кластере вдоль направления перколяции. Для кругового кластера эта высота совпадает с диаметром этого кластера. Зная среднюю площадь кластера и его среднюю высоту, легко найти среднюю «ширину» кластера:

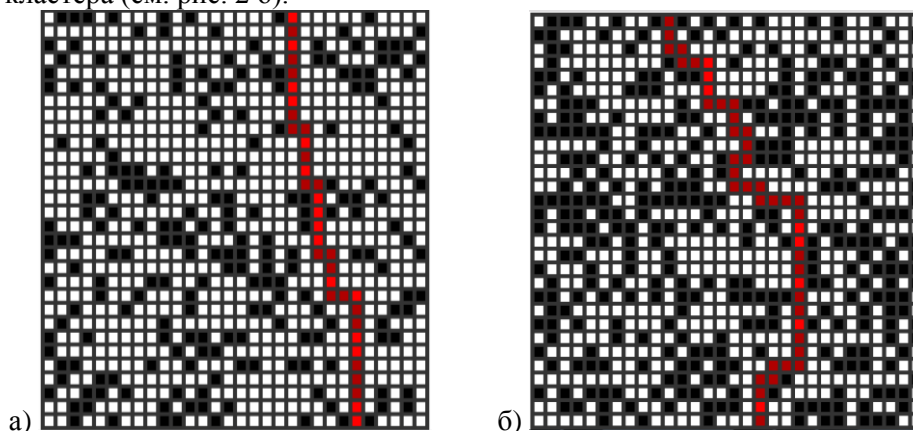
$$S_{cl}(p) = \frac{p}{M(p)2r(p)} = \frac{p\sqrt{M(p)\pi}}{2M(p)\sqrt{p}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p\pi}{M(p)}} \quad (4)$$

Зная выражение для средней «ширины» кластера можно найти среднее количество черных ячеек, задействованных в перколяционном пути и распределенных по этой «ширине» кластера.

Из рассмотрения процесса случайных блужданий вытекает размах отклонений попутных черных ячеек от первоначального вектора движения перколяции. Например, на рисунке 2 можно заметить, что на некоторых строках происходит отклонение перколяционного пути от первоначального вектора перколяции (движение по прямой сверху-вниз). Причем чем выше концентрация, тем сильнее это отклонение вплоть до максимума при концентрации стохастического перколяционного пробоя. После размах этих отклонений начинает уменьшаться, а перколяционный путь выпрямляется.

Если рассматривать поведение черных ячеек, задействованных в программируемом перколяционном пути, то можно заметить случайность их распределения вдоль средней «ширины» кластера. Это поведение черных попутных ячеек хорошо описывается методами случайных блужданий на прямой [11]. Действительно, на высоких концентрациях  $p$  перколяционный путь достаточно извилист за счет сильной рыхлости кластеров (см. рис. 2),

что приводит к колебанию количества черных ячеек, задействованных в пути, внутри этой «ширины» кластера (см. рис. 2 б).



**Рисунок 2.** Увеличение извилистости пути с ростом концентрации  $p$ .

Распределение Рэля-Райса служит для описания длины двумерного случайного вектора, прямоугольные координаты которого являются независимыми нормальными случайными величинами с одинаковыми дисперсиями и, возможно, различными математическими ожиданиями [1].

Программируемый перколяционный путь из-за наличия случайных отклонений от первоначального вектора движения перколяции можно считать таким случайным двумерным вектором. Отклонения попутных черных ячеек от направления движения перколяции можно описать методами случайных блужданий. Из решения задачи случайных блужданий следует, что попутные черные ячейки распределены по закону нормального распределения [11]. Но т.к. максимальный размах этих отклонений не может выходить за границу кластера (т.е. превышать размер средней «ширины» кластера), то нормальный закон распределения отклонений от направления движения перколяции становится законом двустороннего усеченного нормального распределения [1, 11], который описан в выражении 6. Рассматривать подобный размах отклонений будем для  $p_{fix}$  – любая фиксированная концентрация такая, что  $p_{fix} \in [0; 1]$ . Т.е. мы получим набор одинаковых по структуре выражений, описывающих этот размах, но обладающих различными значениями средней «ширины» кластера.

Таким образом, размах отклонений от заданного направления программируемого перколяционного пути хорошо описывается распределением, схожим по структуре с распределением Рэля-Райса и обладающим плавающим параметром масштаба, и поэтому предлагается использовать его для описания поведения черных ячеек, задействованных в пути:

$$f(x) = \frac{x}{\sigma_{cl}^2} e^{-\left(\frac{x^2+m^2}{2\sigma_{cl}^2}\right)} I_0\left(\frac{xm}{\sigma_{cl}^2}\right) \quad (5)$$

где  $f(x)$  – функция, схожая по структуре с плотностью распределения Рэля-Райса и обладающая плавающим параметром масштаба  $\sigma_{cl}^2$ ,  $\sigma_{cl}^2$  – параметр масштаба (одинаковые дисперсии координат вектора, которые являются случайными величинами),  $m$  – параметр формы, равный  $m = \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}$  ( $\mu_1$  и  $\mu_2$  – математические ожидания координат вектора),  $I_0(x)$  – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Рассмотрим теперь поведение кластера в зависимости от концентрации. Согласно выражениям средней площади кластера  $\frac{p}{M(p)}$  и среднего количества кластеров на перколяционной матрице  $M(p) = \sum_{s=1}^N \sum_{t=t_{min_s}^{t_{max_t}} g_{stN} p^s (1-p)^t$  [20], легко заметить, что с ростом концентрации  $p$  площадь кластера также увеличивается. Очевидно, что и средняя «ширина» кластера также увеличивается при росте концентрации. С ростом средней «ширины» кластера растет и количество черных ячеек, задействованных в пути. Т.к. значение (черная или попутная черная) в каждой такой ячейке мы рассматриваем как реализацию независимых

случайных величин с одинаковыми дисперсиями и, вообще говоря, одинаковыми математическими ожиданиями, то необходимо установить реальное пространство вдоль средней «ширины» кластера, вдоль которого действует двустороннее усеченное нормальное распределение. Все ячейки из средней «ширины» кластера потенциально могут быть задействованы в построении программируемого перколяционного пути, а границами этого усеченного нормального распределения будут границы средней «ширины» кластера:

$$f_{nor}(x) = \frac{1}{\gamma\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \alpha \leq x \leq \beta \quad (6)$$

где  $f_{nor}(x)$  – двустороннее усеченное нормальное распределение,  $\gamma = \Phi_0\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  – левая и правая границы усечения соответственно,  $\sigma$  – СКО отклонения попутных черных ячеек от направления движения перколяции, распределенного по двустороннему усеченному нормальному закону, полученное из массового математического эксперимента,  $\mu$  – математическое ожидание нормального распределения.

Исходя из правила  $3\sigma$  и того что усеченное нормальное распределение действует вдоль всех ячеек средней «ширины» можно оценить дисперсию усеченного нормального распределения, являющуюся параметром масштаба для распределения, схожего по структуре с распределением Рэлея-Райса и обладающего плавающим параметром масштаба, следующим образом:

$$S_{cl}(p) = 2C_1(p)3\sigma_{cl}(p) \Rightarrow \sigma_{cl}(p) = \frac{S_{cl}(p)}{6C_1(p)} \quad (7)$$

где  $S_{cl}(p)$  – средняя «ширина» кластера,  $\sigma_{cl}(p)$  – параметр масштаба закона распределения, схожего по структуре с распределением Рэлея-Райса и обладающего плавающим параметром масштаба, являющийся дисперсией двустороннего усеченного нормального распределения;  $C_1(p)$  – согласующий коэффициент, в общем виде являющийся функцией от концентрации и ищущийся из решения следующего уравнения для каждого фиксированного значения концентрации  $p_{fix}$  такой, что  $\forall p_{fix} \in [0; 1]$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{cl}(p|p = p_{fix})^2 &= \left(\frac{S_{cl}(p|p = p_{fix})}{6C_1(p)}\right)^2 = \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{\gamma}(u_1\varphi(u_1) - u_2\varphi(u_2))\right) - (\bar{x} - \mu)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow C_1(p) &= \frac{1}{6} \frac{S_{cl}(p|p = p_{fix})}{\sqrt{\sigma^2(p) \left(1 + \frac{1}{\gamma}(u_1\varphi(u_1) - u_2\varphi(u_2))\right) - (\bar{x} - \mu)^2}} \text{ при } p > 0 \quad (8) \end{aligned}$$

где  $p_{fix}$  – некоторое фиксированное значение концентрации,  $u_1 = \frac{\beta-\mu}{\sigma}$ ,  $u_2 = \frac{\alpha-\mu}{\sigma}$  ( $\alpha$  и  $\beta$  определены в выражении 6),  $\varphi(u)$  – плотность вероятности стандартного нормального распределения,  $\sigma(p)$  – определенная путем статистического моделирования СКО отклонения попутных черных ячеек от направления движения перколяции. Значения  $C_1(p)$  представлены в таблице 1 для различных значений  $p$ .

**Таблица 1.** Значения  $C_1(p)$  от некоторых  $p$ .

$p$	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75
$C_1(p)$	1	1.083	0.975	0.94	0.95	0.96	1.077	1.068	0.998	0.912	0.875	0.858	0.835	0.817	0.778	0.733

Необходимость в фиксировании концентрации объясняется тем, что для каждого значения концентрации существует свое значение средней «ширины» кластера, которое является границами усеченного нормального распределения, описывающего случайные отклонения от первоначального вектора движения перколяции. Следовательно, из выражений 7 и 8 будет меняться и дисперсия усеченного нормального распределения.

Тогда наша функция из выражения 5, схожая по структуре с распределением Рэлея-Райса и обладающая плавающим параметром масштаба, будет являться функцией вероятности возникновения черной ячейки в программируемом перколяционном пути от концентрации (в некоторой бесконечно малой окрестности конкретной концентрации) и примет следующий вид:

$$f(p) = \frac{p}{\left(\frac{S_{cl}(p)}{6C_1(p)}\right)^2} e^{-\left(\frac{p^2+m^2}{2\left(\frac{S_{cl}(p)}{6C_1(p)}\right)^2}\right)} I_0\left(\frac{pt}{\left(\frac{S_{cl}(p)}{6C_1(p)}\right)^2}\right) \quad (9)$$

Среднее количество черных ячеек  $\mathfrak{N}(p)$ , задействованных в программируемом перколяционном пути и распределенных по средней «ширине» равно:

$$\mathfrak{N}(p) = \frac{p}{\left(\frac{1}{12C_1(p)}\sqrt{\frac{p\pi}{M(p)}}\right)^2} e^{-\left(\frac{p^2+m^2}{2\left(\frac{1}{12C_1(p)}\sqrt{\frac{p\pi}{M(p)}}\right)^2}\right)} I_0\left(\frac{pt}{\left(\frac{1}{12C_1(p)}\sqrt{\frac{p\pi}{M(p)}}\right)^2}\right) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p\pi}{M(p)}} \quad (10)$$

Чтобы найти среднее количество черных ячеек, задействованных в программируемом перколяционном пути, необходимо последнее выражение умножить на среднее количество черных ячеек вдоль направления перколяции:

$$N(p) = \mathfrak{N}(p)pL = \frac{p}{\left(\frac{1}{12C_1(p)}\sqrt{\frac{p\pi}{M(p)}}\right)^2} e^{-\left(\frac{p^2+m^2}{2\left(\frac{1}{12C_1(p)}\sqrt{\frac{p\pi}{M(p)}}\right)^2}\right)} I_0\left(\frac{pt}{\left(\frac{1}{12C_1(p)}\sqrt{\frac{p\pi}{M(p)}}\right)^2}\right) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p\pi}{M(p)}} pL \quad (11)$$

где  $pL$  – среднее количество черных ячеек вдоль направления перколяции,  $L = 1$  для одинарной матрицы  $N$  (матрица, длина сторон которой равна 1).

Среднее интегральное значение  $C_1(p)$  равно 0,92; близость к 1 свидетельствует о хорошем соответствии используемой модели близости случайного процесса отклонений попутных черных ячеек от направления движения перколяции к результатам статистического исследования.

Или кратко выражении 11 можно представить:

$$N(p) = f(p, m, \sigma_{cl}(p)) S_{cl}(p) p \quad (12)$$

где  $N(p)$  – среднее количество черных ячеек, задействованных в программируемом перколяционном пути,  $f(p, m, \sigma_{cl}(p))$  – функция, схожая по структуре с плотностью распределения Рэля-Райса и обладающая плавающим параметром масштаба,  $\sigma_{cl}(p)$  – параметр масштаба,  $m$  – параметр формы ( $m \rightarrow 0$ ),  $S_{cl}(p)$  – средняя «ширина»,  $p$  – концентрация.

Данное выражение можно усилить исходя из следующих рассуждений:

С ростом концентрации кластеры объектов начнут расширяться не только за счет добавления в них новых объектов, но и за счет поглощения (сливания) соседних кластеров. Их общее среднее количество начнет уменьшаться уже с концентрации  $p = 0.26$  как раз за счет поглощения соседних кластеров. Очевидно, что начиная с некоторой высокой концентрации, будет образован один гигантский кластер, вдоль которого будет построен перколяционный путь уже без добавления красных ячеек. С дальнейшим ростом концентрации такой путь будет только выпрямляться, и его извилистость и длина упадет.

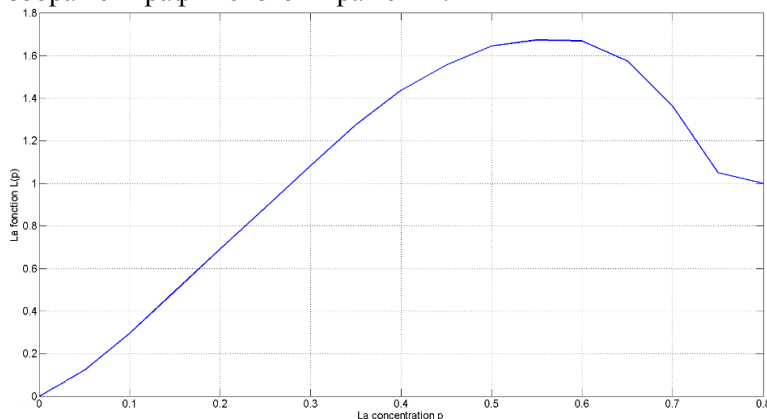
Зафиксируем  $p = p_{fix}$  такой, что при данной концентрации средний диаметр кластера будет равен той длине матрицы, вдоль которой направлена перколяция. Тогда при такой концентрации  $p_{fix}$  функция  $M(p = p_{fix}) \rightarrow \frac{1}{N}$ . И следовательно:

$$\frac{p}{\frac{1}{N}\pi} = \frac{N}{4} \Rightarrow p = \frac{\pi}{4} \quad (13)$$

Усиленную функцию  $N(p)$  можно представить в виде кусочно-заданной функции, где  $\xi\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}, \mu, \sigma_{cl}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) S_{cl}\left(\frac{\pi}{4}\right) \frac{\pi}{4} - 1$  и с дальнейшим ростом концентрации  $\xi(p)$  линейно стремится к нулю:

$$N(p) = \begin{cases} f(p, \mu, \sigma_{cl}(p))S_{cl}(p)p, & \text{при } p \leq \frac{\pi}{4} \\ 1 + \xi(p), & \text{при } p > \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (14)$$

На рисунке 3 изображен график этого выражения.



**Рисунок 3.** Функция среднего количества объектов роя из стохастической основы, задействованных в программируемом перколяционном пути, в зависимости от концентрации.

Аналогичным образом поступим для поиска функции среднего количества добавленных объектов в межкластерные интервалы программируемого перколяционного пути в зависимости от концентрации – добавленных ячеек  $R(p)$ .

Рассмотрим область действия кластера. Перколяционный путь, построенный через этот кластер, можно разделить на два участка: участок, принадлежащий кластеру и состоящий, соответственно, только из черных ячеек, и участок, принадлежащий торойдной структуре области, ограниченной «зоной влияния кластера», и состоящий только из добавленных (красных) ячеек. Т.к. данная торойдная структура достаточно сложна для отдельного анализа, рассмотрим ее как результат удаления из «зоны влияния кластера» самого кластера. Иными словами, рассмотрим поведение перколяционного пути отдельно в «зоне влияния кластера» и внутри самого кластера, представив, что кластер состоит из белых ячеек. Разность этих двух выражений и будет давать нам функцию  $R(p)$ .

«Зона влияния кластера» равна  $\frac{1}{M(p)}$ , тогда средний минимально возможный радиус кластера равен  $r_{min}(p) = \frac{1}{\sqrt{M(p)\pi}}$ , а максимально возможный –  $r_{max}(p) = \frac{1}{2M(p)}$ . Длина  $n$ -мерного случайного вектора, в качестве которых можно считать радиусы кластеров, описывается распределением модуля  $n$ -мерного случайного вектора, которое при  $n = 2$  совпадает с распределением Рэля [1]. Тогда средний радиус можно рассматривать как математическое ожидание двустороннего усеченного распределения Рэля, границами которого являются  $r_{min}$  и  $r_{max}$ :

$$\begin{aligned} r_{moyen} &= \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{(x - r_{min})^2}{\sigma^2} e^{-\frac{(x-r_{min})^2}{2\sigma^2}} dx = \\ &= \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{r_{max} - r_{min}}{\sigma\sqrt{2}}\right) - (r_{max} - r_{min}) e^{-\frac{(r_{max}-r_{min})^2}{2\sigma^2}} \end{aligned} \quad (15)$$

Если усилить  $r_{max}(p) = \frac{1}{M(p)}$ , то последнее слагаемое в разности станет пренебрежительно малым, т.к.  $e^{-\frac{(r_{max}-r_{min})^2}{2\sigma^2}} \rightarrow 0 \forall p \in (0; 1)$ . Т.е.:

$$r_{moyen} \approx \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{r_{max} - r_{min}}{\sigma\sqrt{2}}\right) \quad (16)$$

Зафиксируем  $p = p_{fix} \in (0; 1)$ , тогда:



$$e^{-\frac{(r_{max}(p_{fix})-r_{min}(p_{fix}))^2}{2\sigma^2}} \approx 0 \Rightarrow e^{-\frac{(r_{max}(p_{fix})-r_{min}(p_{fix}))^2}{2\sigma^2}} = \xi \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \frac{(r_{max}(p_{fix})-r_{min}(p_{fix}))^2}{2\sigma^2} = -\ln \xi \Rightarrow \sigma = \frac{r_{max}(p_{fix})-r_{min}(p_{fix})}{\sqrt{-2 \ln \xi}}$$
(17)

Если  $\xi \rightarrow 0$ , то  $\operatorname{erf}\left(\frac{r_{max}(p_{fix})-r_{min}(p_{fix})}{\sigma\sqrt{2}}\right) \rightarrow 1$ . Тогда:

$$r_{moyen}(p) \approx \frac{(r_{max}(p)-r_{min}(p))\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln \xi}}$$
(18)

Теперь зная средний радиус «зоны влияния кластера» найдем среднюю «ширину» как для «зоны влияния», так и для области, занимаемой кластером.

Для средней «зоны влияния кластера» средняя «ширина» будет равна:

$$S_1(p) = \frac{1}{M(p)2r_{moyen}(p)}$$
(19)

Аналогично поступим и для области, занимаемой кластером:

$$S_2(p) = \frac{p}{M(p)2r_{moyen}(p)}$$
(20)

Сама средняя «ширина» есть разница последних двух выражений.

Ранее было показано, что средняя «ширина» используется для поиска плавающего параметра масштаба в распределении, схожем по структуре с распределением Рэля-Райса и обладающем плавающим параметром масштаба. Отметим, что в данном случае усеченное с обеих сторон нормальное распределение должно быть ограничено сильнее, чем границы средней «ширины», т.к. по условию оптимизации количество добавленных ячеек в программируемый перколяционный путь должно быть минимальным, а минимальное количество добавляемых ячеек возможно только при движении по прямой вдоль вектора движения перколяции с почти-нулевыми случайными отклонениями, которые наблюдаются на реальных матрицах. Чтобы выполнить подобное ограничение, в качестве средней высоты кластера будем рассматривать высоту его «зоны влияния»  $h(p) = \frac{2}{\sqrt{M(p)\pi}}$ . Тогда параметр масштаба распределения, схожего по структуре с распределением Рэля-Райса и обладающего плавающим параметром масштаба, можно будет оценить по аналогии с предыдущим случаем как:

$$\sigma_{pol}(p) = \frac{p}{M(p)h(p)6C_2(p)}$$
(21)

где  $\frac{p}{M(p)}$  – объем кластера,  $h(p)$  – высота «зоны влияния кластера»,  $C_2(p)$  – функция согласующих коэффициентов, которая ищется по аналогии с  $C_1(p)$ . Тогда по аналогии с предыдущим случаем запишем выражение для функции среднего количества добавленных ячеек в программируемый перколяционный путь  $R(p)$  для единичной матрицы:

$$R(p) = f(p, m, \sigma_{pol}(p)) S_{pol}(p)(1-p)$$
(22)

где  $R(p)$  – среднее количество добавленных ячеек в программируемый перколяционный путь,  $f(p, m, \sigma_{pol}(p))$  – функция, схожая по структуре с плотностью распределения Рэля-Райса и обладающая плавающим параметром масштаба,  $\sigma_{pol}(p)$  – параметр масштаба,  $m$  – параметр формы ( $m \rightarrow 0$ ),  $S_{pol}(p)$  – средняя «ширина», равная  $S_{pol}(p) = S_1(p) - S_2(p)$ ,  $p$  – концентрация.

Рассмотрим теперь функцию  $R(p)$  при предельно малых значениях концентрации ( $p \rightarrow 0$ ). Очевидно, что при таких  $p$  искусственный перколяционный путь будет являться почти прямой линией, состоящей почти из красных ячеек. Очевидно, что длина такого пути в единичной матрице будет равна 1. Однако используя оригинальное выражение для  $\sigma_{pol}(p)$  функция  $R(p)$  будет не определена, т.к.  $\sigma_{pol}(p|p \rightarrow 0) \rightarrow 0$ . Поэтому необходимо усилить выражение

параметра масштаба из функции, схожей с распределением Рэля-Райса и обладающей плавающим параметром масштаба, для таких критических значений концентрации. Для этого решим следующее уравнение:

$$R(p|p \rightarrow 0) = f(p, m, \sigma_{pol})S_{pol}(p)(1 - p) \quad (23)$$

Решая данное уравнение в случае случайных блужданий по прямой ( $m = 0$ ), получим:

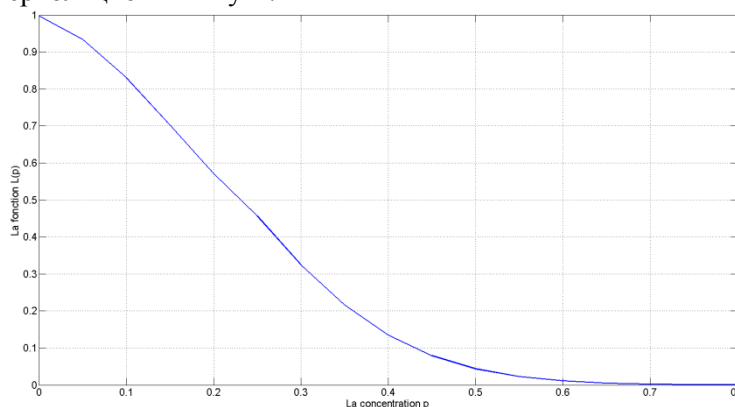
$$\sigma_{pol}(p|p \rightarrow 0) = \frac{1}{\sqrt{-\frac{2}{p^2} W\left(-\frac{p}{2(1-p)S_{pol}(p)}\right)}} \quad (24)$$

где  $W(x)$  – W-функция Ламберта [4, 11],  $R(p|p \rightarrow 0) = 1, p \rightarrow 0$ .

Тогда выражение для параметра масштаба примет следующий вид:

$$\sigma_{pol}(p) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-\frac{2}{p^2} W\left(-\frac{p}{2(1-p)S_{pol}(p)}\right)}}, & p \rightarrow 0 \\ \frac{p}{M(p)h(p)6C_2}, & 0 \ll p < 1 \end{cases} \quad (25)$$

На рисунке 4 изображен график функции  $R(p)$  среднего количества добавленных ячеек в программируемый перколяционный путь.



**Рисунок 4.** График функции  $R(p)$  среднего количества добавленных объектов в межкластерные интервалы программируемого перколяционного пути в зависимости от концентрации.

Полученные аналитические выражения среднего числа черных ячеек на программируемом перколяционном пути  $N(p)$  и среднего числа добавленных в программируемый перколяционный путь ячеек  $R(p)$  решают поставленную задачу ретрансляции сигнала между удаленными агентами роя:

1. выражение  $LL(p) = L(N(p) + R(p))$ , где  $L$  – длина того участка местности, вдоль которого необходимо передать сигнал между агентами, определяет общее количество агентов роя, необходимых для передачи сигнала;

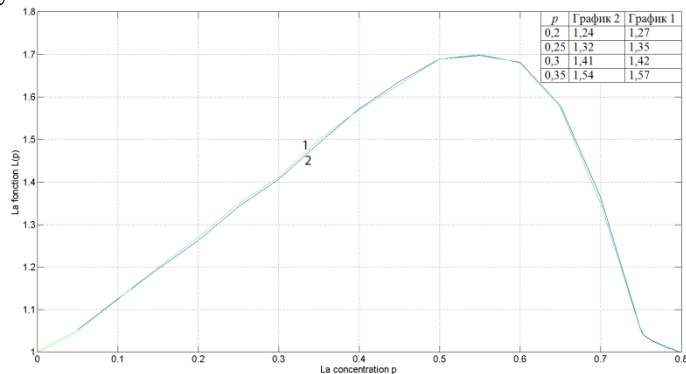
2. выражение  $LR(p)$  определяет то количество агентов роя, которое необходимо добавить в межкластерные интервалы для осуществления передачи сигнала.

Анализируя выражение  $R(p)$  можно сделать вывод, что уже при концентрации  $p = 0.59$  количество добавленных агентов становится пренебрежимо малым, следовательно, при этой концентрации наступает естественный перколяционный пробой.

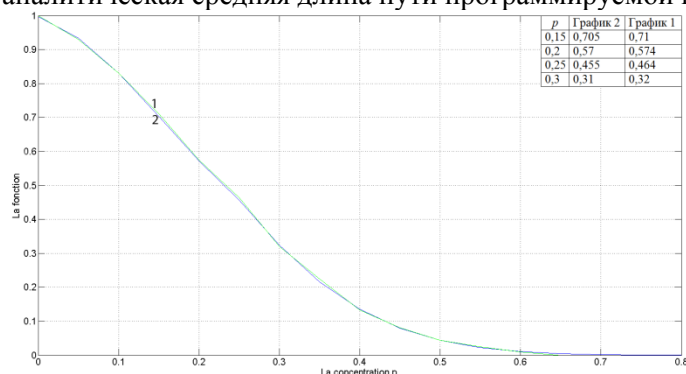
### 3. Статистическое моделирование задачи сетевой передачи сигнала между членами роя вдоль программируемого перколяционного пути

Был проведен обширный математический эксперимент по исследованию двухфазной операции на перколяционной матрице конечного размера. Данный эксперимент проводился следующим образом: на множестве перколяционных матриц проводился сначала засев объектов с

различными концентрациями. Далее алгоритмом Хошена-Копельмана [14, 18] выделялись кластеры, а после строился оптимальный (с минимальным количеством добавленных ячеек) программируемый перколяционный путь (эксперимент проводился для матриц размером  $50 \times 50$ ,  $100 \times 100$  и  $200 \times 200$ ). Полученные нормированные по длине матрицы результаты представлены на рисунках 5 и 6 и практически полностью совпадают с полученными аналитическими результатами.



**Рисунок 5.** График 1 – статистическая средняя длина пути программируемой перколяции; график 2 – аналитическая средняя длина пути программируемой перколяции.



**Рисунок 6.** График 1 – статистическое среднее количество добавленных ячеек  $R(p)$ , нормированное по размеру матрицы  $L$ , в перколяционный путь; график 2 – аналитическое среднее количество добавленных ячеек.

#### 4. Выводы

В результате проделанной работы можно сделать следующие выводы:

1. Для задач, связанных с созданием в зоне обслуживания сквозной фронтальной полосы из зон работы целевой аппаратуры, можно с помощью методов теории программируемой перколяции описать передачу сигнала между удаленными агентами роя через систему ретрансляторов, где в качестве ретрансляторов выступают другие агенты роя.

2. Выражения, полученные аналитическим путем, подтверждаются статистическими данными. С помощью выражения  $LL(p)$  можно описать длину программируемого перколяционного пути на любом значении концентрации, а с помощью выражения  $LR(p)$  – определить количество дополнительных агентов роя, которых необходимо задействовать для формирования сквозного фронтального маршрута через зону обслуживания.

#### 5. Литература

- [1] Вадзинский, Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям / Р.Н. Вадзинский – Санкт Петербург: Наука, 2001. – 298 с.
- [2] Каляев, И.А. Модели и алгоритмы коллективного управления в группах роботов / И.А. Каляев, А.Р. Гайдук, С.Г. Капустян – М.: Физматлит, 2009.
- [3] Каляев, И.А. Стайные принципы управления в группе объектов / И.А. Каляев, А.Р. Гайдук // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2004. – Т. 12. – С. 27-38.

- [4] Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин – М.: Наука, 1976. – 544 с.
- [5] Москалев, П.В. Математическое моделирование пористых структур / П.В. Москалев, В.В. Шитов – Москва: Физматлит, 2007. – 120 с.
- [6] Мостовой, Я.А. Статистические феномены больших распределенных кластеров наноспутников // Вестник Самарского Государственного Университета имени академика С.П. Королева (национального исследовательского университета). – 2011. – Т. 26, № 2. – С. 80-89.
- [7] Мостовой, Я.А. Двухфазные операции в больших сетях наноспутников // Компьютерная оптика. – 2013. – Т. 37, № 1. – С. 120-130.
- [8] Мостовой, Я.А. Управляемая перколяция и оптимальные двухфазовые операции в больших сетях наноспутников // Инфокоммуникационные технологии. – 2013. – Т. 11, № 1. – С. 53-62.
- [9] Мостовой, Я.А. Моделирование оптимальных двухфазных операций в случайных операционных средах // Автотметрия. – 2015. – Т. 51, № 3. – С. 35-41.
- [10] Тарасевич, Ю.Ю. Перколяция: теория, приложения, алгоритмы / Ю.Ю. Тарасевич – Москва: УРСС, 2002. – 109 с.
- [11] Треногин, В.А. Функциональный анализ – М.: Наука, 1980. – 495 с.
- [12] Alexandrowicz, Z. Critically branched chains and percolation clusters // Physics Letters A. – 1980. – Vol. 80(4). – P. 284-286.
- [13] Abraham, A. Swarm Intelligence in Data Mining / A. Abraham, C. Grosan, V. Ramos // Studies in Computational Intelligence – Springer Verlag, Germany, 2006.
- [14] Babalievski, F. Cluster counting: the Hoshen-Kopelman algorithm vs. Spanning tree approach. // International Journal of Modern Physics. – 1998. – Vol. 9(1). – P. 43-61.
- [15] Beni, G. From Swarm Intelligence to Swarm Robotics // Swarm Robotics SAB International Workshop. Lecture Notes in Computer Science. – 2005. – Vol. 3342. – P. 1-10.
- [16] Bonabeau, E. Meyer Ch. Swarm Intelligence: A Whole New Way to Think About Business // Harvard Business Review. – 2001. – Vol. 79(5). – P. 106-114.
- [17] Galam, S. Universal formulas for percolation thresholds / S. Galam, A. Mauger // Phys. Rev. E. – 1996. – Vol. 53(3). – P. 2177-2181.
- [18] Hoshen, J. Percolation and cluster distribution. I. Cluster multiple labeling technique and critical concentration algorithm / J. Hoshen, R. Kopelman // Phys. Rev. B. – 1976. – Vol. 14. – P. 3438-3445.
- [19] Mostovoy, Y.A. Large scale networks security strategy / Y.A. Mostovoy, V.A. Berdnikov // CEUR Workshop Proceedings. – 2017. – Vol. 1901. – P. 187-193.
- [20] Mostovoy, Y.A. Analytical and numerical modeling of the process for cluster emergence of objects in a random environment / Y.A. Mostovoy, V.A. Berdnikov // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – Vol. 1096(1).
- [21] Mostovoy, Y.A. Statistical modeling of a scale network of nanosatellites / Y.A. Mostovoy, V.A. Berdnikov // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – Vol.1096(1).
- [22] Sahin, E. Swarm robotics: From sources of inspiration to domains of application // Swarm Robotics. Lecture Notes in Computer Science. – 2005. – Vol. 3342. – P. 10-20.
- [23] Sarshar, N. Scalable Percolation Search in Power Law Networks / N. Sarshar, P.O. Boykin, V.P. Roychowdhury // Proceedings of the Fourth International Conference on Peer-to-Peer Computing – Zurich, 2004.
- [24] Stauffer, D. Scaling theory of percolation clusters // Physics Reports. – 1979. – Vol. 54. – P. 1-74.
- [25] Stauffer, D. Introduction to Percolation Theory / D. Stauffer, A. Aharony – London: Taylor & Francis, 1992.
- [26] Voronoi, G.F. Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie de formes quadratiques // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1908. – Vol. 134. – P. 198-287.

## **Analytical and numerical modeling of the formation of a programmable percolation route in the planning of two-phase operations**

**Y.A. Mostovoi<sup>1</sup>, V.A. Berdnikov<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

**Abstract.** A swarm of robots, as a system of relatively simple interconnected managed objects, performs a common task simultaneously and in a distributed manner. When planning swarm operations associated with the creation in the service area through the front strip of the zones of the trust instrument – payload objects swarm, there is a problem of transmitting a signal from one robot to another for operational rearrangement of the swarm, as at the time of planning the exact purpose of the swarm operation has not yet been determined, or is a secret, or is determined by a number of random circumstances. The execution of the swarm operation is advisable to carry out in two phases, and the first phase to start even before the resolution of these uncertainties by creating a basic random network with a small concentration of robots in it. In the second phase of the operation, a programmable percolation route is formed by local rearrangement of the robots, which provides target coverage of the target equipment of the swarm objects of a certain service zone. In this case, you can significantly reduce the time of the operation. The corresponding analytical dependences were obtained.