Анализ поведения гигантских волн и новая математическая модель, допускающая точное решение

Ю.Ж. Пчелкина[1], И.В. Алименков[1]

[1]*Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34а, Самара, Россия, 443086*

Аннотация

Показано, что при определённых условиях существуют решения в виде локализованных волновых пакетов гигантских размеров, огибающая которых имеет простую аналитическую форму. Найдено точное аналитическое решение нелинейного уравнения Шрёдингера типа кубик-квинтик, описывающего автомодуляцию стоксовских волн большой амплитуды на поверхности глубокой воды.

Ключевые слова

математическая модель, нелинейные волны на поверхности глубокой жидкости, нелинейное уравнение Шрёдингера типа кубик-квинтик, гигантские локализованные волновые пакеты.

1. Введение

Океанские волны, выходящие из зоны шторма, либо образовавшиеся под действием длительного устойчивого ветра, не являются копией друг друга. Однако, изредка можно выделить квазипериодические цуги волн, которые имеют разные размеры по длине и ширине, различаются средним периодом. Периодическое возмущение [1], [2] в нелинейной системе неустойчиво. Одним из проявлений этой неустойчивости является самофокусировка волн, т.е. автомодуляция волновых пакетов, огибающая которых имеет вид холмов или впадин.

2. Модель поведения гигантских волн на глубокой воде

Рассмотрим квазипериодический цуг волн с амплитудой a и волновым вектором $k = e_x(k_0 + \delta k_x) + e_y(\delta k_y)$. Из усреднённого вариационного принципа Уизема следует [3] дисперсионное соотношение Стокса для волн на глубокой воде:

$$\omega = \omega_0\big(f(\mu,\nu)\big)^{1/4}\big(1 + \varepsilon f(\mu,\nu)\big)^{1/2}, \tag{1}$$

где $\mu = (\delta k_x/k_0) \ll 1$; $\nu = (\delta k_y/k_0) \ll 1$; $\varepsilon = k_0^2 a^2 \ll 1$; $f = (1 + 2\mu + \mu^2 + \nu^2)$.

Разложение правой части (1) в ряд по степеням μ, ν, ε до второго порядка включительно имеет вид $\omega = \omega_0(1 + \mu/2 - \mu^2/8 + \nu^2/4 + \varepsilon/2 - \varepsilon^2/8)$. Полагая $\omega = \omega_0 + \delta\omega$, получим:

$$\delta\omega - \frac{\omega_0}{2k_0}\delta k_x + \frac{\omega_0}{8k_0^2}(\delta k_x)^2 - \frac{\omega_0}{4k_0^2}\big(\delta k_y\big)^2 - \frac{\omega_0}{2}k_0^2 a^2 + \frac{\omega_0}{8}k_0^4 a^4 = 0.$$

Это уравнение является Фурье – эквивалентом операторного уравнения

$$i\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{\omega_0}{2k_0}\cdot\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\omega_0}{8k_0^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\omega_0}{4k_0^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\omega_0}{2}k_0^2 a^2 + \frac{\omega_0}{8}k_0^4 a^4 = 0,$$

которое в применении к комплексной огибающей $A = ae^{i\theta}$ (учитывая, что $a = |A|$) даёт нелинейное уравнение Шрёдингера:

$$i\left(\frac{\partial A}{\partial t} + i\frac{\omega_0}{2k_0}\cdot\frac{\partial A}{\partial x}\right) - \frac{\omega_0}{8k_0^2}\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\omega_0}{4k_0^2}\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\omega_0 k_0^2|A|^2 A + \frac{1}{8}\omega_0 k_0^4|A|^4 A = 0 \tag{2}$$

Следует отметить, что в [3] и [4] приведено уравнение, отличающееся от (2) отсутствием последнего члена. Однако, это отбрасывание приводит к потере точного локализованного решения уравнения (2).

Рассмотрим квазипериодический цуг, движущийся вдоль оси x. В сопутствующей системе отсчета, движущейся вдоль оси x со скоростью $\omega_0/2k_0$, уравнение (2) принимает вид:

$$i\frac{1}{\omega_0}\frac{\partial A}{\partial t}-\frac{1}{8k_0^2}\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{1}{4k_0^2}\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}=\frac{1}{2}k_0^2|A|^2A-\frac{1}{8}k_0^4|A|^4A=0. \quad (3)$$

Будем искать решение уравнения (3) в виде

$$A=R(y)\cdot exp\{i(t\cdot\Delta\omega-xq)\}, \quad (4)$$

где $R(y)$ – вещественная функция, стремящаяся на бесконечности вместе со своей производной к нулю, $\Delta\omega$ – ширина частотного спектра, q – ширина спектра волновых чисел с центром k_0. Подстановка (4) в (3) даёт $R''(y)=4k_0^2\varepsilon_0R(y)+2k_0^4R^3(y)-(k_0^6/2)R^5(y)=0$, где $\varepsilon_0=(\Delta\omega/\omega_0)-(q^2/8k_0^2)$. После интегрирования получим $R'^2=4\varepsilon_0k_0^2R^2+k_0^4R^4-(k_0^6/6)R^6$, где постоянная интегрирования в силу граничных условий равна нулю. Разделяя переменные и интегрируя ещё раз, имеем:

$$\int\frac{dR}{\sqrt{4\varepsilon_0k_0^2R^2+k_0^4R^4-k_0^6R^6/6}}=(y-y_0).$$

$$R=\frac{\sqrt{8\varepsilon_0}/k_0}{\left(\sqrt{1+8\varepsilon_0/3}\cdot ch\left(4\sqrt{\varepsilon_0}k_0y\right)-1\right)^{1/2}} \quad (5)$$

Вещественная огибающая $A_{real}=R\,cos(t\Delta\omega-qx)$ - последовательность горбов и впадин. Пиковая высота горба:

$$R_{real}^{max}=\frac{\sqrt{8\varepsilon_0}/k_0}{\sqrt{\sqrt{1+8\varepsilon_0/3}-1}}.$$

Удерживая первый член разложения внутреннего радикала в знаменателе, находим, что пиковая высота горба $R_{real}^{max}\cong\sqrt{6}/k_0=\sqrt{6}\lambda_0/2\pi\approx 0.39\lambda_0$. По формуле Шулейкина [8] при $\lambda_{kp}\approx\lambda_0$ имеем $h/\lambda_0\approx 1/7$. Это отношение чаще всего приводится в литературе по океанологии. Для штормовых волн квазипериодического цуга высотой $h\approx 10$м, получим параметр $\lambda_0=70$ м, тогда пиковая высота гигантских волн будет равна $0.78\,\lambda_0=54.6$ м.

3. Заключение

В настоящее время известны солитонные решения одномерного нелинейного уравнения Шрёдингера [3], [4] и численные исследования системы уравнений Дьяченко [5]-[7]. В данной работе предложена новая модель, а также найдено простое аналитическое решение двумерного нелинейного уравнения Шрёдингера для волн на глубокой воде.

4. Литература

[1] Ландау, Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1982. – 624 с.
[2] Власов, С.Н. Самофокусировка волн / С.Н. Власов, В.Н. Таланов // Н. Новгород: ИПФ РАН. – 1997. – 220 с.
[3] Yuen, H.C. Nonlinear Dynamics of Deep-Water Gravity Waves / H.C. Yuen, B.M. Lake // Advances in Applied Mechanics. – 1982. – Vol. 22. – P. 68-230.
[4] Лонгрен, К. Солитоны в действии / К. Лонгрен, Э. Скотт. – М.: Мир, 1981. – 312 с.
[5] Захаров, В.Е. О вероятности возникновения волн-убийц / В.Е. Захаров, Р.В. Шамин // Письма в ЖЭТФ. – 2010. – Т. 91, № 2. – С. 68-71.
[6] Захаров, В.Е. Статистика волн-убийц в вычислительных экспериментах / В.Е. Захаров, Р.В. Шамин // Письма в ЖЭТФ. – 2012. – Т. 96, № 1. – С. 68-71.
[7] Захаров, В.Е. Энергетический портрет волн-убийц / В.Е. Захаров, Р.В. Шамин, А.В. Юдин // Письма в ЖЭТФ. – 2014. – Т. 99, № 9. – С. 597-600.
[8] Шулейкин, В.В. Физика моря. – М.: Наука, 1968. – 1090 с.